Devoir non surveillé n°07 (correction)

1 Tir de projectile et influence des frottements

Première partie : on néglige la résistance de l'air.

1. On applique, dans le référentiel terrestre, la deuxième loi de Newton au projectile soumis à son seul poids et on projette cette relation sur l'axe vertical ascendant :
$$m\vec{a} = m\vec{g} \quad \text{donc} \quad \ddot{z} = -g$$
On intègre cette équation différentielle en tenant compte de la condition $\dot{z}(0) = v_0$:
$$\boxed{v(t) = -g \times t + v_0}$$

2. Pour obtenir la hauteur atteinte, on peut utiliser la conservation de l'énergie mécanique pour le projectile soumis au seul poids, l'énergie cinétique initiale étant transformée en énergie potentielle :
$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgH \quad \text{donc} \quad \boxed{H = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{50,0^2}{2,00 \times 9,80} = 128 \text{ m}}$$

Seconde partie : on tient compte des frottements.

1. F devant avoir la dimension d'une force c'est à dire le produit d'une masse par une accélération :
$$[k] = \frac{[F]}{[r_0^2 v^2]} = \frac{M.L.T^{-2}}{L^2.L^2.T^{-2}} = M.L^{-3}$$
k a donc la dimension d'une masse volumique et s'exprime en $\boxed{\text{kg.m}^{-3}}$ dans le système international d'unités.

2. Calculons l'intensité de la force de frottement et du poids (en faisant attention aux unités) :
⋆ $F = 0,25 \times \pi \times \left(2,0 \times 10^{-2}\right)^2 \times 50^2 \simeq 0,79$ N
⋆ $P = mg = \dfrac{4}{3}\pi r_0^3 \rho g = \dfrac{4\pi}{3} \times \left(2,0 \times 10^{-2}\right)^3 \times 11,3 \times 10^3 \times 9,8 \simeq 3,7$ N
F n'étant pas totalement négligeable devant P, il faut en tenir compte si on veut trouver le résultat à mieux que 10%.

3. Appliquons à nouveau la deuxième loi de Newton en projection sur (Oz) en tenant maintenant compte de la force de frottement :
$$m\frac{dv}{dt} = -mg - k\pi r_0^2 v^2$$
Notons que l'on peut écrire :
$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dz} \times \frac{dz}{dt} = \frac{dv}{dz} \times v = \frac{1}{2}\frac{dv^2}{dz}$$
On reporte cette expression dans la relation déduite de la deuxième loi de Newton :
$$\boxed{\frac{dv^2}{dz} = -2g - 2\frac{k\pi}{m} r_0^2 v^2}$$
L'expression est bien celle attendue en posant $u = v^2$.

4. En posant $d = \dfrac{m}{2k\pi r_0^2}$, on peut réécrire l'équation : $\dfrac{du}{dz} + \dfrac{u}{d} = -2g$

Il s'agit d'une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants avec second membre, on sait que la solution générale est de la forme :
$$u(z) = -2gd + Ae^{-z/d}$$
La condition initiale s'écrit : $u(z=0) = v_0^2$, soit : $v_0^2 = -2gd + A$ et finalement :
$$u(z) = -2gd + \left(v_0^2 + 2gd\right) e^{-z/d}$$
Il faut alors inverser la relation pour en déduire :
$$\frac{u + 2gd}{v_0^2 + 2gd} = e^{-z/d} \quad \text{donc} \quad \boxed{z = d \ln\left(\frac{v_0^2 + 2gd}{u + 2gd}\right)}$$

5. L'altitude maximale H' correspond à $v = 0$ donc $u = 0$:
$$H' = d \times \ln\left(\frac{v_0^2 + 2gd}{2gd}\right) = d \times \ln\left(1 + \frac{v_0^2}{2gd}\right) = \boxed{d \times \ln\left(1 + \frac{H}{d}\right)}$$
Pour l'application numérique, commençons par calculer la valeur de d.
$$d = \frac{m}{2k\pi r_0^2} = \frac{\rho \times 4\pi/3 \times r_0^3}{2k\pi r_0^2}$$
$$d = \frac{2\rho}{3k} r_0 = \frac{2 \times 11,3 \times 10^3}{3 \times 0,25} \times 2,0 \times 10^{-2} = 6,02 \times 10^2 \text{ m}$$
$$\boxed{H' = 602 \times \ln\left(1 + \frac{50,0^2}{2,00 \times 9,80 \times 602}\right) = 116 \text{ m}}$$
Notons que H' est logiquement inférieure à H.

6. Comme $d = \dfrac{m}{2k\pi r_0^2}$, un faible frottement correspondant à $k \to 0$ signifie $d \to \infty$ et donc $H/d \ll 1$, on a donc :
$$\boxed{H' = d \times \ln\left(1 + \frac{H}{d}\right) \simeq d \times \frac{H}{d} = H}$$
On retrouve la hauteur atteinte en l'absence de frottement.

2 Poursuite (facultatif)

1. Première expression de $\dot{x}(t)$ et $\dot{y}(t)$

   (a) Le point A se déplace selon (Ox) à vitesse constante v_0 donc $\overrightarrow{OA} = v_0 t \vec{u}_x$.
   Par projection dans le repère (xOy), $\overrightarrow{AM} = -r\cos\theta \vec{u}_x - r\sin\theta \vec{u}_y$
   Comme, par définition, $\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y$, on en déduit :
   $$\boxed{x(t) = v_0 t - r\cos\theta} \quad \text{et} \quad \boxed{y(t) = -r\sin\theta}$$

(b) On dérive les expressions précédentes :

$$\boxed{\dot{x}(t) = v_0 - \dot{r}\cos\theta + r(\sin\theta)\dot{\theta}} \quad \text{et} \quad \boxed{\dot{y}(t) = -\dot{r}\sin\theta - r(\cos\theta)\dot{\theta}}$$

2. Seconde expression de $\dot{x}(t)$ et $\dot{y}(t)$

(a) Par définition du vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes :

$$\boxed{\vec{v}(M) = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y}$$

(b) Ce vecteur vitesse de norme v fait un angle θ avec l'axe (Ox), soit :

$$\boxed{\vec{v}(M) = v_0\cos\theta\vec{u}_x + v_0\sin\theta\vec{u}_y}$$

3. Systèmes d'équations différentielles liant r et θ

En comparant les deux systèmes d'équations, on en déduit :

$$v\cos\theta = v_0 - \dot{r}\cos\theta + r(\sin\theta)\dot{\theta} \ \ (1) \quad \text{et} \quad v\sin\theta = -\dot{r}\sin\theta - r(\cos\theta)\dot{\theta} \ \ (2)$$

On effectue (1) $\times \cos\theta +$ (2) $\times \sin\theta$ pour en déduire :

$$\boxed{\dot{r} = v_0\cos\theta - v} \quad \text{et} \quad \boxed{r\dot{\theta} = -v_0\sin\theta}$$

4. D'après les relations précédentes :

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{dr}{dt}\frac{dt}{d\theta} = (v_0\cos\theta - v)\times\left(\frac{-r}{v_0\sin\theta}\right) = \boxed{\frac{r(v - v_0\cos\theta)}{v_0\sin\theta} = \frac{dr}{d\theta}}$$

5. Initialement $\boxed{r(0) = d}$ et $\boxed{\theta(0) = \pi/2}$.

6. Vérifions les conditions initiales :

Pour $\theta = \pi/2$, $\sin\theta = 1$ et $\tan\pi/4 = 1$, donc $r = d$, la condition initiale est donc bien vérifiée.

Vérifions que l'expression proposée vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{d}{\sin\theta}\frac{v}{v_0}\frac{1}{2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)^{v/v_0-1} + \frac{-d\cos\theta}{\sin^2(\theta)}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)^{v/v_0}$$

On met alors r en facteur :

$$\frac{dr}{d\theta} = r\left(\frac{-\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{v}{2v_0}\frac{1}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)$$

$$\frac{dr}{d\theta} = r\left(\frac{-\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{v}{2v_0}\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right) = r\left(\frac{-\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{v}{v_0}\frac{1}{\sin\theta}\right)$$

7. Le chien ne peut rattraper le maître que si sa vitesse est supérieure à celle de son maître $\boxed{\frac{v}{v_0} > 1}$

En fin de poursuite $r \to 0$, montrons que ceci est compatible avec $\theta \to 0$:

$$r \simeq \frac{d}{\theta}\left(\frac{\theta}{2}\right)^{v/v_0} \simeq \frac{d}{2^{v/v_0}}\theta^{v/v_0-1}$$

Comme $v/v_0 > 1$, $\theta \to 0$ entraîne bien $r \to 0$.

8. Déterminons une relation liant θ et t :

$$\boxed{\frac{d\theta}{dt} = \frac{-v_0\sin\theta}{r} = \frac{-v_0\sin^2\theta}{d}\frac{1}{\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)^{v/v_0}}}$$

9. On sépare les variables de l'expression précédente pour en déduire :

$$\frac{d}{v_0}\frac{\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)^{v/v_0}}{\sin^2\theta}d\theta = -dt$$

On intègre alors cette équation entre $t = 0$ et τ, θ variant alors de $\pi/2$ à 0 :

$$\int_{\pi/2}^{0}\frac{d}{v_0}\frac{\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)^{v/v_0}}{\sin^2\theta} = -\int_0^{\tau}dt = -\tau$$

Soit finalement grâce à l'indication de l'énoncé :

$$\boxed{\tau = \int_0^{\pi/2}\frac{d}{v_0}\frac{\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)^{v/v_0}}{\sin^2\theta} = \frac{d}{v_0}\frac{\frac{v}{v_0}}{\left(\frac{v}{v_0}\right)^2 - 1}}$$

10. Pour $v \gg v_0$, $\boxed{\tau \simeq d/v}$, le maître est quasiment immobile et la chien parcourt la distance d à la vitesse v.

Pour $v \to v_0$, $\boxed{\tau \to \infty}$, le chien met un temps infini à rattraper le maître.

11. En posant $\tau_m = d/v_0$, on trace τ/τ_m en fonction de v/v_0.