Lycée Naval, Sup 2.

Devoir non surveillé n°07 (pour le 13 janvier 2016)

1 Tir de projectile et influence des frottements

Un projectile de forme sphérique est lancé à la date $t = 0$ depuis un point origine O, suivant la verticale ascendante (Oz) et avec une vitesse initiale $v_0 = 50,0$ m.s^{-1}. Le référentiel d'étude est le référentiel terrestre supposé galiléen pour l'expérience. On note $\vec{g} = -g\vec{u}_z$ le champ de pesanteur terrestre. On donne $g = 9,80$ m.s^{-2}.

Première partie : on néglige la résistance de l'air.

1. En appliquant la deuxième loi de Newton, déterminer l'expression du vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ du projectile au cours de son mouvement.
2. Exprimer puis calculer l'altitude H maximale atteinte par le projectile.

Seconde partie : on tient compte des frottements.

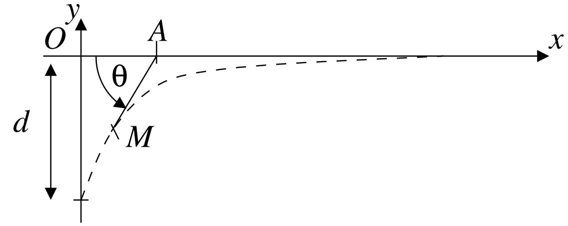
La résistance de l'air est modélisée par une force de frottement d'intensité $F = k\pi r_0^2 v^2$ où k est une constante positive, $r_0 = 2,00$ cm le rayon du projectile et v sa vitesse instantanée. On donne $k = 0,250$ U.S.I (unité du système international). Le projectile est en plomb, de masse volumique $\rho = 11,3$ g.cm^{-3}.

1. Quelle est l'unité de la constante k dans le système international d'unités ?
2. Comparer l'intensité de la force de frottement et du poids (on pourra s'intéresser à l'instant initial). Commenter.
3. Montrer que dans la phase ascendante de la trajectoire, on a :
$$\frac{du}{dz} = -2g - 2\frac{k\pi}{m}r_0^2 u \quad \text{avec} \quad u = v^2$$
4. En déduire l'expression de la fonction $z(u)$ au cours de la phase ascendante. On posera $d = \dfrac{m}{2k\pi r_0^2}$.
5. Montrer que l'altitude maximale atteinte a pour expression :
$$H' = d \times \ln\left(1 + \frac{H}{d}\right)$$
Calculer la valeur numérique de H'.
6. Montrer qu'à la limite d'un frottement très faible, $H' \simeq H$.
On admettra que $\ln(1+\varepsilon) \simeq \varepsilon$ pour $\varepsilon \ll 1$.

2 Poursuite (facultatif)

Remarque : si l'exercice est délicat, il a été décomposé en un grand nombre de questions ; plusieurs résultats intermédiaires sont fournis et permettent de continuer la recherche.

Un promeneur A suit un chemin rectiligne le long de l'axe (Ox) avec une vitesse constante v_0. À l'instant initial, le promeneur est situé à l'origine du repère et son chien M se trouve à une distance d sur la perpendiculaire (Oy) au chemin. Pour rejoindre son maître, le chien court vers celui-ci à une vitesse v constante, et toujours dans la direction de son maître : c'est à dire qu'à chaque instant le vecteur vitesse est dirigé selon le vecteur $\overrightarrow{MA}$.
On appelle x et y les coordonnées de M dans la base cartésienne ; on pose $r = AM$ et θ tel que défini sur le schéma qui représente la poursuite à un instant quelconque.



1. Première expression de $\dot{x}(t)$ et $\dot{y}(t)$.
   (a) En remarquant que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$, montrer que les composantes cartésiennes de $M(t)$ s'expriment selon :
   $$x(t) = v_0 t - r\cos\theta \quad \text{et} \quad y(t) = -r\sin\theta$$
   (b) Dériver les expressions précédentes pour en déduire $\dot{x}(t)$ et $\dot{y}(t)$ en fonction de v_0, r, $\dot{r}$, θ et $\dot{\theta}$ (système d'équations (I)).
2. Seconde expression de $\dot{x}(t)$ et $\dot{y}(t)$.
   (a) x et y étant les composantes de M dans le repère (xOy), exprimer $\vec{v}(M)$ en fonction de $\dot{x}$ et $\dot{y}$.
   (b) Sachant que ce vecteur vitesse est de norme constante et dirigé selon $\overrightarrow{MA}$, déterminer les expressions de $\dot{x}(t)$ et $\dot{y}(t)$ en fonction de v et θ (système d'équations (II)).
3. Système d'équations différentielles liant r et θ.
Comparer les systèmes d'équations (I) et (II) et en déduire que :
$$\dot{r} = v_0\cos\theta - v \quad \text{et} \quad r\dot{\theta} = -v_0\sin\theta$$

4. En se rappelant que $\frac{dr}{d\theta} = \frac{dr}{dt}\frac{dt}{d\theta}$, utiliser les équations précédentes pour en déduire une équation différentielle du première ordre portant sur $r(\theta)$.
5. Quelles sont les conditions initiales de la poursuite, c'est à dire $\theta(t = 0)$ et $r(t = 0)$.
6. Montrer que l'expression :
$$r = \frac{d}{\sin\theta}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)^{v/v_0}$$
est la solution de l'équation différentielle qui vérifie la condition initiale.
7. Quelle condition doit vérifier le rapport v/v_0 pour que le chien puisse rattraper le maître ? Cette condition étant vérifiée, déterminer la valeur limite de θ. On rappelle que, pour des angles faibles devant un radian, $\sin\theta \simeq \theta$ et $\tan\theta \simeq \theta$.
8. En utilisant l'expression donnant $r(\theta)$ et $r\dot{\theta} = -v_0 \sin\theta$, écrire une équation différentielle portant sur $\theta(t)$.
9. Montrer que la durée τ de la poursuite a pour expression :
$$\tau = \frac{d}{v_0}\frac{\frac{v}{v_0}}{\left(\frac{v}{v_0}\right)^2 - 1}$$
Indication : on admettra que : $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin^2(\theta)}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)^{\lambda} d\theta = \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1}$.
10. Étudier les cas particuliers $v \gg v_0$ et $v \to v_0$ par valeurs supérieures. Montrer que les résultats obtenus sont bien ceux attendus.
11. Représenter τ en fonction de v/v_0.