Lycée Naval, Sup 2.

Devoir non surveillé n°06 (correction)

1 Conditions initiales et état final

1. Pour le circuit considéré, le condensateur se charge en une durée caractéristique de l'ordre de RC. « Un long moment » signifie une durée **grande devant RC**, ce qui assure que le condensateur est chargé sous la tension E avant le basculement de l'interrupteur.

2. Avant la fermeture de l'interrupteur, i_2 est nécessairement nulle (interrupteur ouvert dans cette branche) ; on est donc ramené à un simple circuit RC soumis à une tension E depuis un « long moment », le régime permanent est donc atteint, le condensateur est chargé sous la tension E et l'intensité est nulle.
En résumé en $t = 0^-$: $\boxed{i(0^-) = i_1(0^-) = i_2(0^-) = 0}$, $\boxed{u(0^-) = E}$.

3. Juste après la fermeture de l'interrupteur, la tension étant continue aux bornes d'un condensateur on a $u(t = 0^+) = u(t = 0^-) = E$; d'après la loi d'Ohm pour la résistance $R/2$, $u(t = 0^+) = E = \frac{R}{2} i_2(t = 0^+)$, soit $i_2(t = 0^+) = 2E/R$.
De plus la loi des mailles permet d'écrire :
$$E = Ri(t = 0^+) + u(t = 0^+) = Ri(t = 0^+) + E \quad \Rightarrow \quad i(t = 0^+) = 0$$
Finalement d'après la loi des nœuds $i = i_1 + i_2$, d'où :
$$i_1(t = 0^+) = i(t = 0^+) - i_2(t = 0^+) = -\frac{2E}{R}$$
En conclusion $\boxed{u(t = 0^+) = E}$, $\boxed{i_2(t = 0^+) = \frac{2E}{R}}$, $\boxed{i(t = 0^+) = 0}$ et $\boxed{i_1(t = 0^+) = -\frac{2E}{R}}$
On peut comprendre ces résultats simplement : quand on ferme l'interrupteur le condensateur et le générateur sont à la même tension, l'intensité ne peut s'écouler dans la résistance R, et le condensateur commence à se décharger dans la résistance $R/2$.

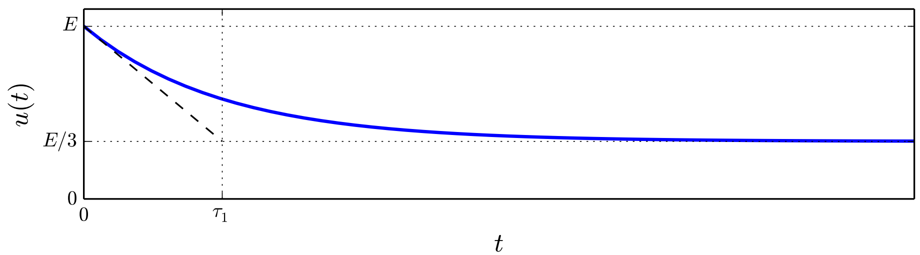
4. Une fois le régime permanent atteint, le condensateur est chargé, u n'évolue plus et donc $i_1 = 0$, on en déduit $i = i_2$, le courant passant seulement dans la branche de gauche, on en déduit aisément : $\boxed{i = i_2 = \frac{E}{3R/2} = \frac{2E}{3R}}$; connaissant i_2 on peut alors déterminer $\boxed{u = \frac{R}{2} \times i_2 = \frac{E}{3}}$.

2 Étude du régime transitoire

1. Les différentes équations s'écrivent :
⋆ <u>Loi des mailles</u> (1) : $E = Ri + u$; <u>Loi d'Ohm pour R/2</u> (2) : $u = \frac{R}{2} i_2$;
<u>Loi des nœuds</u> (3) : $i = i_1 + i_2 = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + i_2$
On reporte alors l'équation (3) dans l'équation (1) et on utilise (2) pour exprimer i_2 en fonction de u ce qui donne :
$$\frac{E - u}{R} = C\frac{du}{dt} + \frac{2u}{R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{E}{R} = C\frac{du}{dt} + \frac{3u}{R}}$$
Expression qui est compatible avec la relation proposée en divisant les deux membres par $R/3$.

2. Résolution de l'équation différentielle :
⋆ <u>Solution particulière</u> : $u^p(t) = E/3$
⋆ <u>Solution homogène</u> : $u^h(t) = Ae^{-3t/RC}$
La solution générale est de la forme $u(t) = E/3 + Ae^{-3t/RC}$ et doit vérifier $u(t = 0^+) = E$, soit :
$E = E/3 + A$ soit $A = 2E/3$, ce qui donne : $\boxed{u(t) = \frac{E}{3}\left(1 + 2e^{-3t/RC}\right)}$.

3. Allure de la courbe :



3 Étude énergétique du régime transitoire

1. Expression de l'intensité i_1 :

$$i_1(t) = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{-2E}{R}e^{-3t/RC}$$

En convention récepteur, la puissance reçue par le condensateur a donc pour expression :

$$\boxed{P(t) = u(t) \times i_1(t) = \frac{-2E^2}{3R}(e^{-3t/RC} + 2e^{-6t/RC})}$$

2. Pour obtenir l'énergie reçue par le condensateur il faut intégrer l'expression précédente de 0 jusqu'à $+\infty$, c'est à dire :

$$\mathcal{E} = \int_0^\infty \frac{-2E^2}{3R}(e^{-3t/RC} + 2e^{-6t/RC})\mathrm{d}t$$

$$\mathcal{E} = \frac{-2E^2}{3R}\left[\frac{-RC}{3}e^{-3t/RC} + \frac{-RC}{3}e^{-6t/RC}\right]_0^\infty$$

$$\boxed{\mathcal{E} = \frac{-2E^2}{3R} \times \frac{2RC}{3} = -\frac{4CE^2}{9}}$$

Lors du régime transitoire la tension du condensateur diminue, il est donc légitime de trouver une énergie reçue négative.
Sachant que $u(0) = E$ et $u = E/3$ quand $t \to \infty$, on peut évaluer les énergies initiale et finale stockées dans le condensateur :

$$\boxed{\mathcal{E}_c^0 = \frac{1}{2}CE^2} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathcal{E}_c^f = \frac{1}{2}C(E/3)^2 = \frac{1}{18}CE^2}$$

<u>Bilan énergétique</u> : l'énergie initiale additionnée de l'énergie reçue doit redonner l'énergie finale :

$$\boxed{\mathcal{E}_c^0 + \mathcal{E} = \frac{1}{2}CE^2 - \frac{4CE^2}{9} = \frac{1}{18}CE^2 = \mathcal{E}_c^f}$$