Lycée Naval, Sup 2.

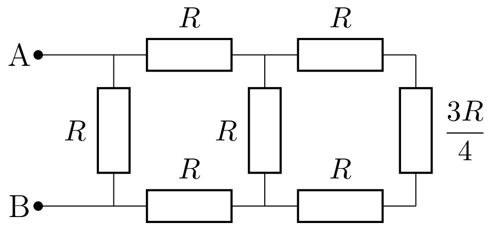
Devoir non surveillé n°05 (correction)

1 Résistance équivalente

1. Dans le cas d'un unique module, le circuit correspond à l'association en parallèle d'une résistance R et d'une résistance $3R$, on en déduit donc la valeur de la résistance équivalente à un module, notée R_1 :

$$\boxed{R_1 = \frac{3R \times R}{4R} = \frac{3R}{4}}$$

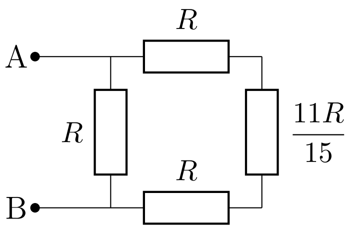
<u>Association de trois modules</u> : on commence par remplacer le module le plus à droite par sa résistance équivalente $3R/4$, le réseau se redessine ainsi :



On peut alors calculer la résistance équivalente du bloc constitué d'une résistance R en parallèle avec une résistance $R + R + \frac{3}{4}R = \frac{11R}{4}$, c'est à dire :

$$\boxed{R_2 = \frac{(11R/4) \times R}{(11R/4) + R} = \frac{11R}{15}}$$

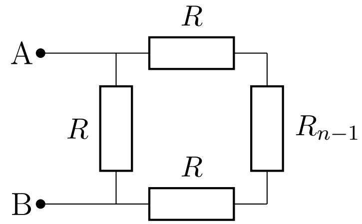
On peut alors redessiner le circuit :



Et finalement, en effectuant une ultime association en parallèle avec une association R et $R + R + \frac{11R}{15} = \frac{41R}{15}$:

$$\boxed{R_3 = \frac{(41R/15) \times R}{(41R/15) + R} = \frac{41R}{56}}$$

2. Les $(n-1)$ premiers modules sont équivalents à une résistance R_{n-1} inconnue que l'on branche sur le n^{eme} module pour aboutir au circuit :



La résistance équivalente R_n pour les n modules peut donc s'écrire :

$$\boxed{R_n = \frac{R \times (2R + R_{n-1})}{3R + R_{n-1}}}$$

3. En faisant tendre dans les deux membres n vers $+\infty$, et en appelant R_∞ la limite, on obtient :

$$R_\infty = \frac{R \times (2R + R_\infty)}{3R + R_\infty}$$

Équation que l'on peut réécrire : $R_\infty^2 + 2RR_\infty - 2R^2 = 0$.

On conserve la racine positive de cette équation, c'est à dire :

$$\boxed{R_\infty = \frac{-2R + \sqrt{4R^2 + 8R^2}}{2} = (\sqrt{3} - 1)R}$$

4. Il faut partir de la relation de récurrence : $R_n = \frac{R \times (2R + R_{n-1})}{3R + R_{n-1}}$, relation qui permet de calculer la résistance suivante connaissant la précédente.

Le code Python (commenté) peut donc être le suivant :

R=10
Req=3*R/4 ; # initialisation de R_{eq} à la valeur de R_1.
for i in range(9) :
.   Req=R*(2R+Req)/(3R+Req) : # calcul de R_{n+1} connaissant R_n.
Req # affichage de R_{10}

5. Ajouter un module en parallèle ne peut qu'abaisser la résistance équivalente du circuit (cela augmente les possibilités de s'écouler pour le courant), la suite R_n est donc nécessairement décroissante, de plus elle est minorée par 0 car la résistance ne peut être négative ; la suite étant décroissante et minorée, elle est donc convergente.

2 Batterie tampon

I - Absence de batterie tampon

1. Dans ce circuit série :
$$e(t) = (R + r_1) \times i(t) \quad \Rightarrow \quad \boxed{i(t) = \frac{e(t)}{R + r_1}}$$
2. On établit un système d'équations permettant de déterminer l'ordonnée à l'origine et le coefficient directeur :
$$e(0) = 6 = a \times 0 + b \quad \text{et} \quad 4,8 = a \times 24 + b$$
On en déduit : $b = 6,0$ V et $a = (4,8 - 6,0)/24 = -0,050$ V/h et $\boxed{e(t) = (-0,050 \times t + 6,0)\ V}$.
3. En utilisant les deux résultats précédents :
$$i(t) = \frac{-0,050t + 6,0}{14} \quad \Rightarrow \quad \boxed{i(t) = (-3,6 \times t + 4,3 \times 10^2)\ \text{mA}}$$
4. Diminution relative d'intensité :
$$\boxed{\frac{i(0) - i(24)}{i(0)} = \frac{3,6 \times 24}{4,3 \times 10^2} = 0,20 = 20\%}$$

II - Présence d'une batterie tampon

1. La loi des nœuds s'écrit : $i = i_1 + i_2$
La tension u_{AB} peut s'exprimer de trois manières différentes (attention à l'orientation générateur pour les résistances internes des générateurs) :
$$u_{AB} = Ri \quad , \quad u_{AB} = e_2 - r_2 i_2 \quad \text{et} \quad u_{AB} = e_1 - r_1 i_1$$
À l'aide de ces équations, on obtient :
$$i_2 = \frac{e_2 - Ri}{r_2} \quad \text{et} \quad i_1 = \frac{e_1 - Ri}{r_1}$$
Expressions que l'on reporte dans la loi des nœuds pour conserver comme seule intensité i :
$$i = \frac{e_1 - Ri}{r_1} + \frac{e_2 - Ri}{r_2} \quad \Leftrightarrow \quad i\left(1 + \frac{R}{r_1} + \frac{R}{r_2}\right) = \frac{e_1}{r_1} + \frac{e_2}{r_2}$$
On multiplie alors les deux membres de l'expression précédente par $r_1 r_2$ pour obtenir :
$$\boxed{i(t) = \frac{r_2 e_1(t) + r_1 e_2}{r_1 r_2 + R(r_1 + r_2)}}$$
Équation aux dimensions : l'expression de l'intensité électrique est le produit d'une tension par une résistance divisée par le carré d'une résistance, soit le rapport d'une tension sur une résistance, ce qui est bien une intensité.
2. En remplaçant par les valeurs numériques :
$$i(t) = \frac{0,10 \times (-0,050t + 6,0) + 4,0 \times 4,0}{4 \times 0,1 + 10 \times 4,1}$$
$$\boxed{i(t) = (-0,12 \times t + 4,0 \times 10^2)\ \text{mA}}$$
3. Diminution relative sur 24 h :
$$\frac{i(0) - i(24)}{i(0)} = \frac{0,12 \times 24}{4,0 \times 10^2} = 0,72 \times 10^{-2} = \boxed{0,72\%}$$
L'accumulateur permet de préserver une valeur quasi-constante de l'intensité du courant malgré l'affaiblissement de la pile.