

# Physique – Chimie DM n°8, à rendre pour le 03/02/2016

## Données numériques

Masse du proton  $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$  kg

Masse de l'électron  $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$  kg

Charge électrique élémentaire  $e = 1,60 \cdot 10^{-19}$  C

Célérité de la lumière dans le vide  $c = 3,00 \cdot 10^8$  m.s<sup>-1</sup>

Perméabilité magnétique du vide  $\mu_0 = 1,26 \cdot 10^{-6}$  kg.m.A<sup>-2</sup>.s<sup>-2</sup>

Permittivité diélectrique du vide  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  kg<sup>-1</sup>.m<sup>-3</sup>.A<sup>2</sup>.s<sup>4</sup>

Constante des gaz parfaits  $R = 8,31$  J.K<sup>-1</sup>.mol<sup>-1</sup>

## Unités

Energie 1,00 eV =  $1,60 \cdot 10^{-19}$  J

1,00 MeV =  $1,00 \cdot 10^6$  eV

1,00 GeV =  $1,00 \cdot 10^9$  eV

1,00 TeV =  $1,00 \cdot 10^{12}$  eV

Dans tout le problème, « exprimer » signifie donner l'expression littérale et « calculer » signifie donner la valeur numérique. Les résultats numériques seront donnés avec 3 chiffres significatifs.

On note  $v$  la vitesse d'un proton ; on définit les coefficients sans dimension  $\beta$  et  $\gamma$  :

$$\beta = \frac{v}{c}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

## I - Energie et vitesse d'une particule

Dans toute cette partie, aucune connaissance en relativité restreinte n'est exigible. Les accélérateurs sont construits dans le but d'étudier des phénomènes, souvent rares, dont la probabilité varie avec l'énergie de collision. C'est pourquoi les paramètres les plus importants sont l'énergie du faisceau et le nombre de collisions. On note  $E$  l'énergie relativiste d'un proton,  $v$  sa vitesse et  $m_p$  sa masse. Sur la figure I.1, on a représenté, en trait plein  $\frac{E}{m_p c^2}$  en fonction du rapport  $\frac{v}{c}$ .

On note  $E_0$ , l'énergie d'un proton au repos, également appelée énergie de masse. Soit  $E_{class} = E_0 + \frac{1}{2} m_p v^2$  que l'on nommera l'énergie classique de la particule. Sur le même graphe, est représentée en pointillés,  $\frac{E_{class}}{m_p c^2}$ .

. 1 . Particule au repos

1 - a) A l'aide du graphe de la figure I.1, donner l'expression de  $E_0$  en fonction de  $m_p$  et  $c^2$ .

Quel est le nom de cette relation ? De quand date-t-elle ?

1 - b) Calculer en eV, l'énergie de masse d'un proton.

1 - c) Justifier alors que la masse du proton  $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$  kg puisse également s'écrire

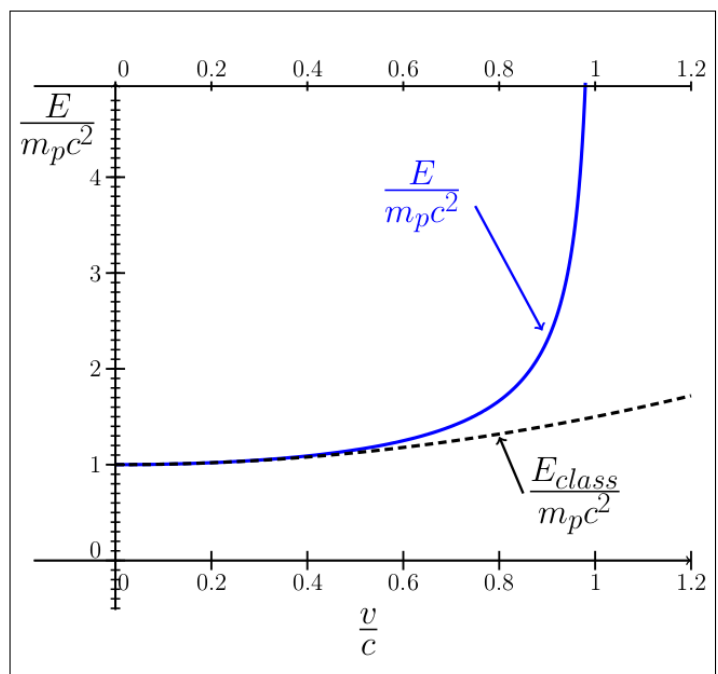


FIG. I.1 –  $\frac{E}{m_p c^2}$  (trait plein) et  $\frac{E_{class}}{m_p c^2}$  (pointillés) en fonction du rapport  $\frac{v}{c}$ .

$m_p = 939 \text{ MeV} \cdot c^{-2}$ .

. 2 . En vous aidant du graphe de la figure I.1, justifier pourquoi il est impossible d'accélérer le proton jusqu'à la vitesse de la lumière.

. 3 . Donner l'intervalle de vitesse dans lequel le rapport  $\frac{E - E_{class}}{E}$  est approximativement inférieur à 10 %. Dans cet intervalle, on réalise l'approximation classique.

. 4 . L'expression relativiste de l'énergie d'une particule est :  $E = \gamma m_p c^2$  avec  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$

5 - a) Montrer que lorsque  $v \ll c$  alors  $\approx E_{class}$ , en s'aidant du fait que

$\forall \alpha \in \mathbb{R}, (1 + \varepsilon)^\alpha \sim 1 + \alpha\varepsilon$  si  $\varepsilon \rightarrow 0$

5 - b) Calculer en MeV les énergies du proton :

$E_{injection}$ , à l'injection dans le LHC, pour  $v_{injection} = 0,999997828c$  et  $E_{max}$  pour la vitesse maximale  $v_{max} = 0,999999991c$ .

5 - c) Expliquer alors pourquoi, en physique des particules, on se réfère généralement à l'énergie de la particule et non à sa vitesse.

## II Cavités accélératrices



Fig. II.1 – Photo 1 : Pulvérisation de Niobium dans une cavité supraconductrice. Image issue du site CERN Document Server. ©CERN.

### II - A Accélérateur d'électrons de Van de Graaff

Historiquement, l'accélérateur de Van de Graaff est un des premiers à avoir été utilisé. Le générateur de Van de Graaff constitue la partie droite du schéma présenté ci-dessous (figure II.2).

Des électrons sont arrachés à la pointe par la courroie et transportés jusqu'à la brosse, ils sont ensuite accumulés au niveau du terminal. Un système de cinq résistances (toutes égales à  $R$ ) relie le terminal à la pointe. On choisit le potentiel nul au niveau de la pointe. Soit  $V = -V_{HT}$  le

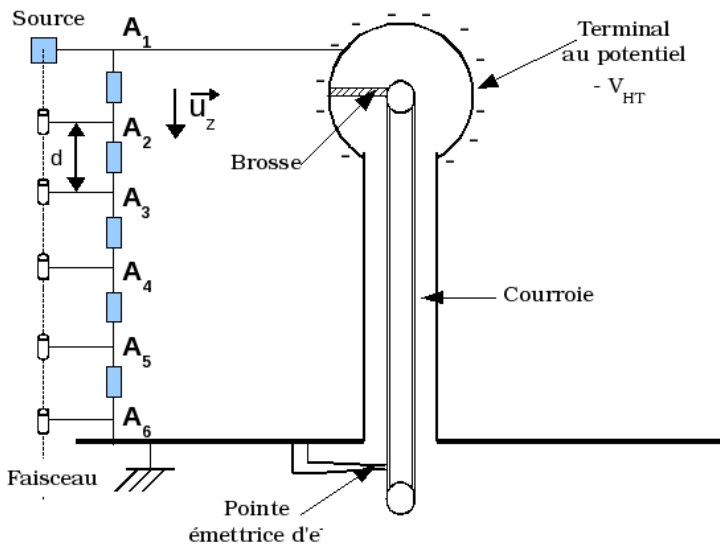


Fig. II.2 – Accélérateur d'électrons de Van de Graaff

potentiel du terminal, c'est également le potentiel de la source :  $V_{A1} = -V_{HT}$ . L'accélérateur est situé sur la gauche du schéma. Au niveau de la source, des électrons sont produits et ont le potentiel  $V_{A1}$ . Ils sont accélérés en direction du tube cylindrique creux porté au potentiel  $V_{A2}$ , puis vers les différents tubes portés aux potentiels  $V_{Ai}$  pour  $i$  entier  $\in \{3..6\}$ . On note  $d$  la distance entre chaque tube. On supposera que la longueur d'un tube est négligeable devant  $d$ . Soit  $\vec{U}_z$  un vecteur unitaire orienté de  $A_1$  vers  $A_2$ .

. 6 . Accélérateur de Van de Graaff

6 - a) Exprimer les valeurs des potentiels électriques aux points  $A_6, A_5, A_4, A_3, A_2$  et  $A_1$ .

6 - b) On note  $d$  la distance entre deux points successifs (voir figure II.2) et on admet que le champ électrique est uniforme. Exprimer le champ électrique  $\vec{E}$  en fonction de  $\tau$ ,  $d$  et de  $\vec{U}_z$ .

. 7 . Les électrons (de charge  $-e$ , masse  $m$ ) sont produits au niveau de la source sans vitesse initiale.

7 - a) Exprimer leur énergie cinétique  $E_{ci}$  dans le tube relié au point  $A_i$  en fonction de  $i$ , de  $e$  et de  $V_{HT}$  pour  $i \in \{1..6\}$ .

7 - b) Calculer l'énergie cinétique en eV d'un électron en  $A_6$ , avec  $V_{HT} = 100.10^3 V$ .

7 - c) Pourquoi ce type de générateur, est-il dangereux si l'on cherche à obtenir des énergies cinétiques importantes ?

## II - B Accélérateur linéaire de protons de Wilderöe

Pour atteindre des tensions supérieures, on utilise des accélérateurs linéaires fonctionnant avec un générateur sinusoïdal à haute fréquence (HF).

Les particules accélérées sont maintenant des protons.

Les protons produits au niveau de la source, traversent des tubes de cuivre reliés à l'une ou à l'autre des bornes du générateur représenté sur la figure II.3.

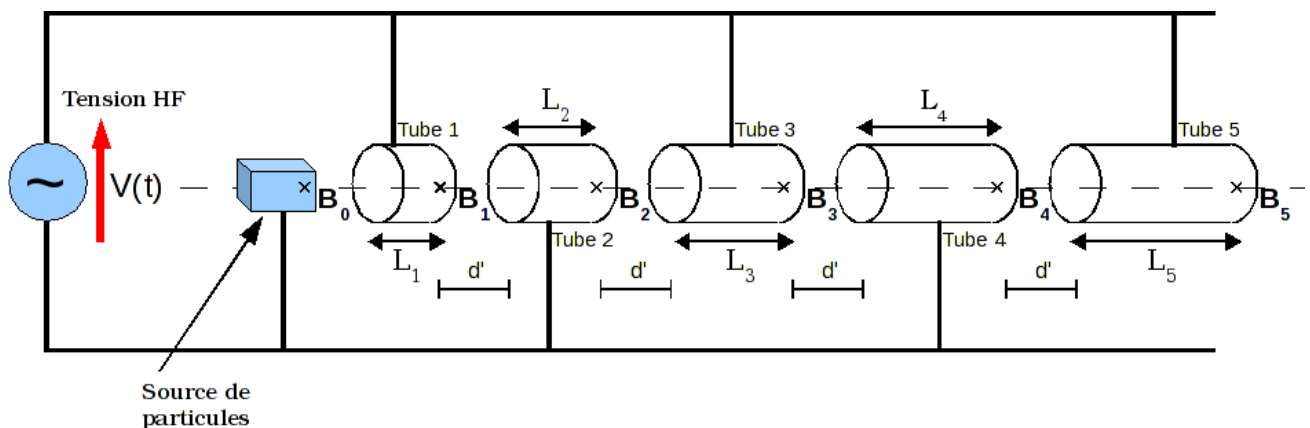


Fig. II.3 – Accélérateur de Wilderöe

La tension délivrée par le générateur est :

$$V(t) = V_{max} \sin(\omega t + \phi) \text{ avec } V_{max} \text{ positif et } 0 < \phi < 2\pi.$$

On note  $T$  la période du signal.

Les tubes sont distants de  $d_0$ . **A l'intérieur de chaque tube, le champ électrique est nul ; il est uniforme entre deux tubes consécutifs.** On supposera que  $d_0$  est suffisamment faible,

**pour que l'on puisse considérer que le proton voit un champ électrique indépendant du temps, entre deux tubes consécutifs.**

Le point  $B_0$  est placé à la sortie de la source, les différents points  $B_i$  sont placés à la sortie des tubes  $i$  pour  $i \in \{1..5\}$ . On note  $L_i$  la longueur du tube  $i$ .

Les seules forces considérées sont les forces électriques. L'étude est faite dans le cadre de la mécanique classique.

. 8 . Variations temporelles

8 - a) Exprimer  $T$  en fonction de  $\omega$ .

8 - b) Représenter, sur votre copie, les vecteurs champs électriques, à la date  $t = 0$ , aux points  $B_0, B_1, B_2, B_3, B_4$  et  $B_5$ . Pour le dessin on prendra  $0 < \phi < \pi$ .

8 - c) Même question à la date  $t = \frac{T}{2}$ .

. 9 . Condition d'accélération

On note  $v_i$  la vitesse au point  $B_i$  pour  $i \in \{1..5\}$ .

9 - a) A quelle condition, les protons sont-ils toujours accélérés ?

9 - b) Si cette condition est respectée, représenter en fonction du temps l'allure de la vitesse des protons entre les points  $B_0$  et  $B_5$ .

9 - c) Les tubes ont-ils tous la même longueur, pour une accélération optimale ?

. 10 . On s'intéresse à un proton, placé en  $B_0$  sans vitesse initiale à  $t = 0$ . Le générateur est synchronisé avec le mouvement de la particule pour l'accélérer à chaque point  $B_i$ .

10 - a) On supposera que  $d_0$  est suffisamment faible, pour que l'on puisse négliger la durée de chaque phase d'accélération devant la durée du parcours dans les tubes. Exprimer  $L_i$  en fonction de  $v_i$  et  $T$ .

10 - b) Pour quelles valeurs de  $\phi$ , le proton est-il effectivement accéléré ?

10 - c) Exprimer l'énergie cinétique  $E_c$  de la particule en  $B_i$  en fonction de  $m_p, L_i$  et  $T$ .

10 - d) Pour une vitesse proche de  $c$ , et une fréquence du GBF égale à 10 MHz, calculer la longueur d'un tube.

10 - e) Expliquer pourquoi ce type d'accélérateur provoque un regroupement des particules en paquets.

## II - C Cavités résonnantes (facultatif)

Pour atteindre des énergies supérieures, en gardant une longueur de tubes raisonnable, il faut augmenter la fréquence du générateur.

A haute fréquence, les tubes se comportent comme des antennes dipolaires et rayonnent énormément d'énergie. La solution, pour éviter ces pertes, consiste à enfermer les tubes dans une cavité résonnante dont les parois réfléchissent le rayonnement.

Les cavités, pour les ondes radio-fréquences (RF), peuvent être modélisées par un circuit électrique simple. L'excitation est modélisée par un générateur idéal de tension. On se place en régime sinusoïdal forcé à la pulsation  $\omega$  et on adopte la notation complexe :  $u(t) = \text{Re} [\underline{u}(t)]$  et  $\underline{u}(t) = U_m e^{j\omega t}$  avec  $j^2 = -1$  et  $\text{Re} [\underline{u}(t)]$  désigne la partie réelle du nombre complexe  $\underline{u}(t)$ .

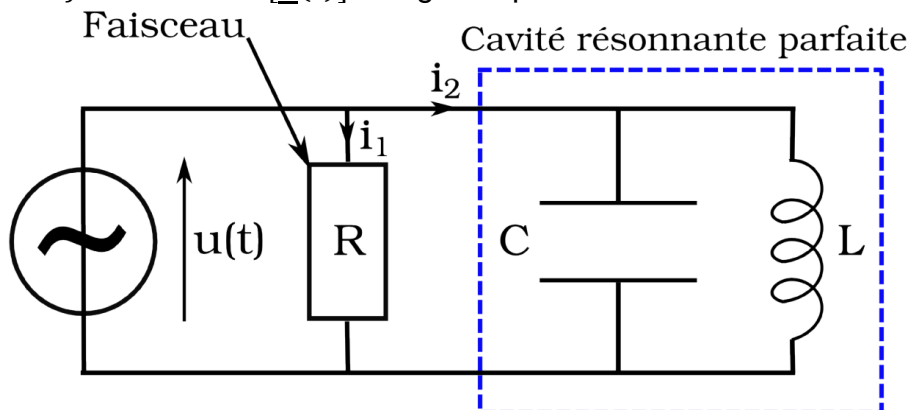


Fig. II.4 – Modélisation électrique d'un faisceau dans une cavité parfaite

**. 11 . Modèle électrique d'une cavité parfaite**

Une cavité parfaite peut être modélisée par un condensateur de capacité  $C$  mis en parallèle avec une bobine d'inductance  $L$ . Le faisceau est modélisé par une résistance de charge  $R$  (figure II.4).

**11 - a)** Donner l'impédance complexe équivalente de la cavité résonnante parfaite.

**11 - b)** Donner les expressions réelles du courant  $i_1(t)$  traversant la résistance  $R$  et  $i_2(t)$  traversant la cavité, en fonction de  $U_m, R, L, C, \omega$  et  $t$ .

**11 - c)** Pour quelle valeur particulière  $\omega_0$  de  $\omega$ ,  $i_2(t)$  est-il nul ?

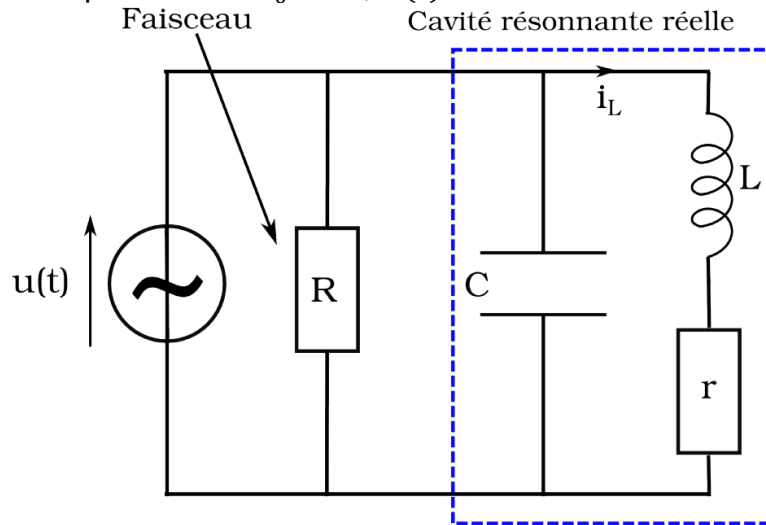


Fig. II.5 – Modélisation électrique d'un faisceau dans une cavité réelle

**. 12 . Modèle électrique d'une cavité réelle**

Dans une cavité réelle, les courants surfaciques sur les bords de la cavité induisent des pertes. On modélise ces pertes par une résistance  $r$  placée en série avec la bobine.

Dans la suite on note  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$  où  $\omega_0$  a été définie à la question précédente.

**12 - a)** Calculer l'impédance complexe équivalente  $Z$  de la cavité résonnante réelle.

**12 - b)** Montrer que le module au carré de cette impédance peut s'écrire sous la forme :

$$|Z|^2 = r^2 \frac{1 + Q^2 x^2}{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}$$

On exprimera  $Q$  en fonction de  $L, \omega_0$  et  $r$ .

**12 - c)** Soit  $I_L(t) = I_0 \cos(\omega t + \alpha)$  le courant circulant dans la branche contenant la bobine et la résistance  $r$ . Exprimer  $I_0, \tan \alpha$  et  $\sin \alpha$  en fonction de  $L, U_m, \omega$  et  $r$ .

**12 - d)** Dans la suite de l'énoncé, on se place dans une situation où  $L\omega \gg r$ . Que vaut alors  $\alpha$  ? Que peut-on alors dire du courant circulant dans la bobine et de la tension aux bornes du condensateur ?

**12 - e)** On suppose que  $\omega = \omega_0$ . En déduire une expression de l'énergie  $U$  totale stockée dans la cavité résonnante en fonction de  $L$  et  $\omega_0$ .

**12 - f)** Exprimer la puissance moyenne  $\mathcal{P}$  dissipée dans  $r$ . Montrer que l'on trouve la relation suivante :  $Q = \frac{\omega_0 U}{\mathcal{P}}$

**12 - g)** Lorsque la cavité est à température ambiante, le facteur de qualité vaut  $Q = 3,00 \cdot 10^4$ . A la température de 4 K,  $Q = 10^{10}$  et la puissance dissipée vaut 16 W.

Que vaudrait la puissance dissipée dans une cavité fonctionnant à température ambiante et ayant la même énergie stockée ? Justifier alors l'intérêt d'utiliser des cavités supraconductrices.

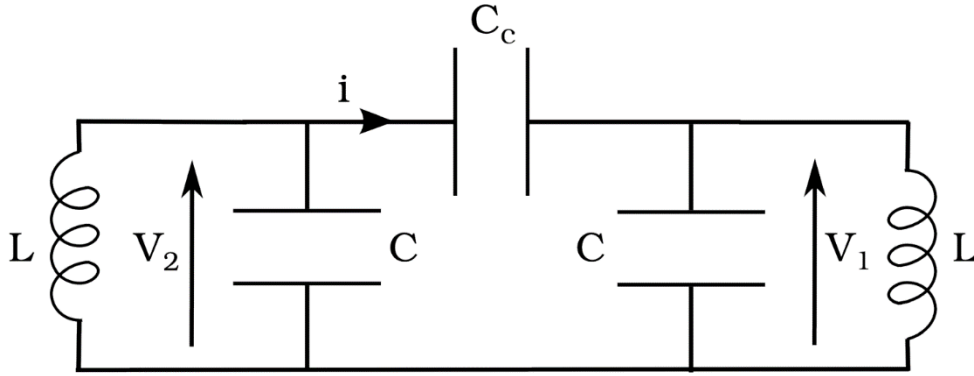


Fig. II.6 – Modèle électrique pour deux cavités idéales couplées

**. 13 .** Modèle électrique pour deux cavités idéales couplées

Dans la partie II - B, on a vu qu'il était nécessaire d'avoir plusieurs tubes successifs, pour n'utiliser qu'une seule source de haute fréquence, il paraît judicieux de coupler les différentes cavités.

On considère deux cavités idéales identiques couplées par un condensateur  $C_c$ . On note  $V_1$  et  $V_2$  les tensions aux bornes des condensateurs, avec la convention décrite sur la figure III.6.

On pose :  $D = \frac{C_c}{C}$ ,  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  et  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$

**13 - a)** Soit  $i$  l'intensité du courant dans la branche du condensateur  $C_c$ . Exprimer  $i$  en fonction de  $C_c$ ,  $\frac{dV_1}{dt}$  et  $\frac{dV_2}{dt}$ .

**13 - b)** En déduire le système d'équations différentielles couplées vérifiées par  $V_1$  et  $V_2$ .

**13 - c)** En régime sinusoïdal forcé, montrer que le système d'équation revient à résoudre :

$$(1 - (1 + D)x^2)^2 - D^2x^4 = 0$$

**13 - d)** Trouver les deux pulsations propres et commenter.

**13 - e)** Si le système comprend  $N$  cavités couplées, combien trouvera-t-on de modes propres ?

**. 14 .** On étudie une cavité, fonctionnant avec une source radio-fréquence délivrant la tension :

$$V(t) = -V_{max} \sin(2\pi f_{RF}t + \phi)$$

On prendra les valeurs numériques suivantes :

fréquence  $f_{RF} = 700 \text{ MHz}$  et  $V_{max} = 1,00 \cdot 10^6 \text{ V}$ .

**14 - a)** Calculer la période du champ radio-fréquence.

**14 - b)** En vous inspirant des résultats de la partie III - B, calculer la longueur d'un tube  $L_i$  pour une vitesse  $v_i = 0,65c$ .

Dans le cas des cavités, la longueur d'un tube correspond à la distance entre deux cellules. Sur la figure III.1 est représenté un exemple de ce type de cavité. Cette grandeur est indépendante de  $i$  et sera notée  $L_{cellule}$ .

**14 - c)** On admet que, dans une cavité, une particule entrant avec un déphasage  $\phi$  par rapport au champ électrique subit le même champ  $E$  tout au long de son déplacement ; on a

$$E = \frac{V_{max} \sin \phi}{L_{cellule}}$$

Montrer que l'énergie acquise par la particule dans la cavité est alors  $\Delta U_a = N_{cell} e V_{max} \sin \phi$  où  $N_{cell}$  est le nombre de cellules de la cavité.

**14 - d)** Calculer  $\Delta U_a$  pour  $N_{cell} = 5$ ,  $\phi = \frac{\pi}{2}$  et l'exprimer en MeV.