

Devoir surveillé n°07 (Centrale, PC, 2015, correction)

1 Ondes acoustiques et oreille externe

I.A. Équations des ondes acoustiques

1. L'approximation acoustique est une approximation de **grande longueur d'onde**, c'est à dire que le déplacement des couches de fluide est supposé très faible vis à vis de la longueur d'onde. Dans cette approximation, on montre en particulier que $|p(x,t)| \ll P_0$, $|\mu(x,t)| \ll \rho_0$, les calculs sont menés à l'ordre 1.

La surpression varie selon l'intensité et la fréquence de l'onde mais elle est de l'ordre de 10^{-5} bar.

2. Cf. cours pour le détail des démonstrations qui doivent bien évidemment être réalisées lors de l'épreuve :

Équation locale de conservation de la masse :

$$\text{div}(\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \boxed{\rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial x} = 0}$$

Principe fondamental de la dynamique pour une tranche de fluide :

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} \Rightarrow \boxed{\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}}$$

Évolution isentropique :

$$\chi_s = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_s \Rightarrow \boxed{\mu = \rho_0 \chi_s p}$$

En combinant les équations, on en déduit l'équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec} \quad \boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_s}}}$$

3. Pour un gaz parfait, l'hypothèse isentropique permet d'appliquer la loi de Laplace :

$$P \rho^{-\gamma} = cste \Rightarrow \frac{\delta P}{P_0} - \gamma \frac{\delta \rho}{\rho_0} = 0 \Rightarrow \chi_s = \frac{1}{\rho_0} \frac{\delta \rho}{\delta P} = \frac{1}{\gamma P_0}$$

On en déduit pour la célérité dans l'air : $c = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}}$ et finalement, compte tenu de l'équation d'état du gaz parfait :

$$c = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M}} \Rightarrow c = \sqrt{\frac{1,4 \times 8,31 \times 290}{28,8 \times 10^{-3}}} \quad \boxed{c = 342 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

4. Si l'eau est plus dense que l'air d'un facteur 1000 dans les conditions ambiantes, sa **compressibilité est cent mille fois plus faible**. Cet effet l'emporte dans l'expression $c^2 = 1/(\rho_0 \chi_s)$ pour expliquer une célérité plus élevée dans l'eau.
5. **Le cerveau effectue la localisation spatiale de l'émetteur en tenant compte des instants d'arrivée différents (ou déphasage) du signal aux deux oreilles.** La célérité étant cinq fois plus grande dans l'eau que dans l'air, le décalage temporel est réduit d'autant rendant la localisation *a priori* plus délicate. Sans compter que le résultat risque d'être mal interprété, le cerveau se référant pas habitude à l'audition dans l'air.

6. Cette équation traduit le **bilan local d'énergie acoustique** :
 - $\rho_0 v^2/2$ représente la **densité volumique d'énergie cinétique** associée au mouvement de la couche de fluide ;
 - $\chi_s p^2/2$ représente la **densité volumique d'énergie potentielle** associée au phénomène de compression dilatation de la couche de fluide ;
 - $p \vec{v}$ représente le **vecteur densité de courant d'énergie acoustique**, son flux à travers une surface donnée représente l'énergie acoustique qui traverse cette surface par unité de temps.

Sous sa forme intégrale, cette équation stipule que, en l'absence de dissipation et de sources en volume, si l'énergie acoustique varie au cours du temps dans un petit volume, ceci s'explique par le fait que de l'énergie acoustique est en train de sortir ou d'entrer *via* la surface délimitant ce volume.

En électromagnétique, une équation analogue est l'**équation de Poynting** qui possède en plus un terme source ; on peut aussi citer la **loi locale de conservation de la charge électrique**.

I.B - Impédance et intensité acoustique

1. On part de l'équation de la dynamique pour un élément de fluide dans l'approximation acoustique :

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

En posant $u = t - x/c$, une composition de dérivées conduit à :

$$\rho_0 \frac{dv}{du} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{dp}{du} \frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow \rho_0 \frac{dv}{du} = \frac{1}{c} \frac{dp}{du}$$

On intègre sans tenir compte de constante (régime ondulatoire) :

$$\rho_0 \times v = \frac{1}{c} p \Rightarrow \boxed{Z = \rho_0 c}$$

Application numérique :

$$Z_{air} = \rho_{air} \times c_{air} = 1,2 \times 342 \Rightarrow Z_{air} = 4,1 \times 10^2 \text{ Pa} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$Z_{eau} = \rho_e \times c_e = 10^3 \times 1500 \Rightarrow Z_{eau} = 1,5 \times 10^6 \text{ Pa} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$$

2. En projection selon la direction de l'onde :

$$\langle pv \rangle = \left\langle \frac{p^2}{Z} \right\rangle = \frac{1}{2Z} \text{Re}(|\underline{p}|^2) \Rightarrow I = \frac{p_0^2}{2\rho_0 c}$$

3. Soit $\underline{\xi}(x, t) = \xi_0 e^{j(\omega t - kx)}$, la grandeur complexe associée au déplacement de la couche de fluide. Pour une onde sinusoïdale, $\underline{v} = j\omega \underline{\xi}$, c'est à dire, en terme d'amplitudes réelles : $v_0 = \omega \xi_0$.

On peut alors exprimer l'intensité acoustique en fonction du déplacement :

$$I = \frac{p_0^2}{2\rho_0 c} = \frac{1}{2} \rho_0 c v_0^2 = \frac{1}{2} \rho_0 c \omega^2 \xi_0^2 \Rightarrow \xi_0 = \sqrt{\frac{2I}{4\pi^2 f^2 \rho_0 c}}$$

Le document 1 fournit les seuils d'audition $I_0 = 10^{-12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ et de douleur $I_s = 1 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ et donc pour les applications numériques :

$$\rightarrow \xi_0 = \sqrt{\frac{2 \times 10^{-12}}{4\pi^2 \times (440)^2 \times 1,2 \times 342}} \Rightarrow \xi_0 = 2,5 \times 10^{-11} \text{ m}$$

$$\rightarrow \xi_s = \sqrt{\frac{2 \times 1}{4\pi^2 \times (440)^2 \times 1,2 \times 342}} \Rightarrow \xi_s = 2,5 \times 10^{-5} \text{ m}$$

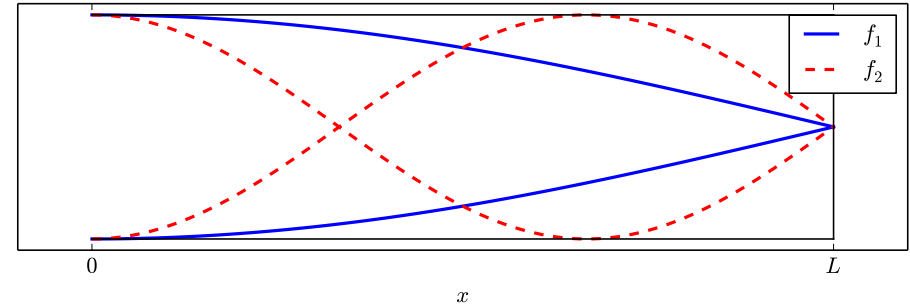
I.C - L'oreille externe

1. En l'absence de dissipation, **le vecteur densité de courant est à flux conservatif en moyenne dans le temps**. L'énergie captée au niveau du pavillon va se concentrer sur une surface beaucoup plus petite à l'entrée de l'oreille. Ce phénomène est rendu possible par la forme de l'oreille.
2. L'impédance est définie par $Z = p/v$:
 - (a) une impédance nulle est associée à une **surpression nulle** : on réalise ceci en laissant **l'ouverture à l'air libre**, la continuité de la pression assure une surpression nulle ;
 - (b) une impédance infinie est associée à une **vitesse nulle** : on réalise ceci en **bouchant le tube à l'extrémité**, la vitesse est alors nulle au niveau de la paroi.

On obtient dans le tube une onde stationnaire.

3. Le canal auditif peut être assimilé à un tube avec une extrémité ouverte et une extrémité fermée ; compte tenu du résultat obtenu à la question précédente (et sachant que pour une onde stationnaire un nœud de pression correspond

à un ventre de vitesse), on obtient pour le mode fondamental de l'onde de vitesse (trait plein sur la figure ci-dessous) :



On constate que la longueur du tube représente le 1/4 de la longueur d'onde :

$$L = \frac{\lambda}{4} = \frac{c}{4f_1} \Leftrightarrow f_1 = \frac{c}{4L} = \frac{342}{4 \times 0,03} \approx 3 \text{ kHz}$$

Cette fréquence de 3 kHz est tout à fait compatible avec le domaine de l'audition humaine.

Cette valeur semble tout à fait compatible avec le dernier graphique du document 4 qui indique un seuil de détection optimal autour de 3 kHz même si d'autres éléments de l'oreille contribuent certainement à ce résultat.

I.D - Protection acoustique

1. Pour cette question, on utilise le document 3 sur le trombone :

→ Détermination des fréquences :

L'énoncé indique : « le ton sépare deux sons dont les fréquences sont dans le rapport 8/9 » et « les allongements produisent six autres positions, dont le son est chaque fois abaissé d'un demi-ton ». Deux fréquences successives sont donc dans un rapport $\sqrt{8/9}$, on peut ainsi déterminer la valeur de ces fréquences connaissant la première :

Position	1	2	3	4	5	6	7
fréquence (Hz)	115,2	108,6	102,4	96,5	91,0	85,8	80,9
longueur (m)	2,950	3,126	3,316	3,517	3,730	3,956	4,196

→ Détermination des longueurs :

Pour les deux premières positions, on constate que le produit de la longueur par la fréquence est une constante ; on peut alors supposer que les longueurs sont dans une progression de $\sqrt{9/8}$ et en déduire les longueurs pour les différentes positions.

À noter que l'écart relatif pour la 7^e position entre la valeur annoncée et

la valeur calculée est de l'ordre de 0,5% ce qui semble acceptable. L'énoncé propose $9/8 = 1,125$ pour le ton alors que la valeur exacte est $2^{1/6} = 1,122$.

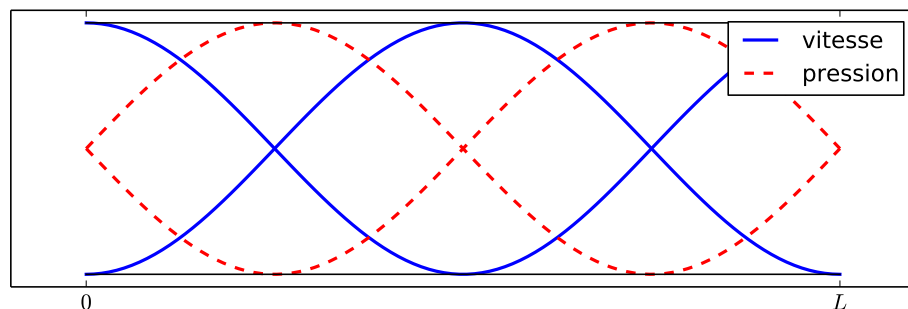
2. Intéressons nous par exemple à la position 1. Connaissant la fréquence et la célérité de l'onde, on en déduit la longueur d'onde :

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{342}{115,2} = 2,97 \text{ m} \approx L_1$$

La longueur étant égale à la longueur d'onde, **on peut raisonnablement envisager des nœuds de surpression aux extrémités du tube**. Pour

une onde stationnaire, la relation $\mu_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x}$ impose, pour une onde stationnaire, que les nœuds de vitesse soit associés à des ventres de pression et réciproquement.

On peut alors proposer pour la structure des ventres et des nœuds :



3. La plus petite fréquence du trombone est obtenue pour le fondamental de la position 7 (plus grande longueur du tuyau) $f_{min} = 80,9 \text{ Hz}$.

L'énoncé indique : « Grâce aux fréquences harmoniques que l'on peut tirer de l'instrument pour chaque position de coulisse, la tessiture (gamme de fréquences) du trombone s'étend sur trois octaves et une quinte ».

L'octave correspond à une multiplication par 2 de la fréquence et la quinte une multiplication de 3/2, ce qui donne pour la plus grande fréquence :

$$f_{max} = 2^3 \times \frac{3}{2} f_{min} = 2^3 \times \frac{3}{2} \times 80,9 \Rightarrow f_{max} = 971 \text{ Hz}$$

Avec le trombone à coulisse, on peut jouer des notes entre 80,9 Hz et 971 Hz.

4. Le trombone à coulisse émet sur une gamme de fréquences qui s'étend de 100 Hz à 1 kHz. Le document 3 indique que le trombone peut produire des sons allant de 85 dB à 115 dB.

Compte tenu du document 4 sur la durée d'exposition au bruit, et même sans jouer systématiquement très fort, une atténuation d'au moins une vingtaine de décibels semble nécessaire pour ramener le niveau sonore autour de 80 à 90 décibels.

Dans la gamme de fréquences du trombone à coulisse, **les protecteurs d'ouïe de type A** semblent répondre aux cahiers des charges lorsque le musicien joue seul.

En présence d'un orchestre, l'intensité sonore est plus importante mais il faut aussi tenir compte d'instruments jouant à plus haute fréquence, les bouchons de type A atténuant fortement à plus haute fréquence, le musicien risque de ne pas entendre les autres instruments, un bouchon atténuant plus uniformément sur une large gamme de fréquences est peut-être à privilégier.

2 Le rôle de l'oreille moyenne

II.A - Onde acoustique et conditions aux limites

- À l'interface entre les deux milieux, il y a **continuité de la vitesse et de la pression** (donc de la surpression). La première relation est imposée par la non interpénétration des milieux, la seconde relation s'obtient à l'aide d'un bilan de forces appliqué à un système infinitésimal à la limite des deux milieux (Cf. cours).
- On note respectivement $p_i(x, t) = P_{0,i} e^{j(\omega t - k_1 x)}$, $p_r(x, t) = P_{0,r} e^{j(\omega t + k_1 x)}$ et $p_t(x, t) = P_{0,t} e^{j(\omega t - k_2 x)}$, les surpressions des ondes incidente, réfléchie et transmise.

Les continuités de la surpression et de la vitesse en $x = 0$ imposent :

$$P_{i,0} + P_{r,0} = P_{t,0} \quad \text{et} \quad v_{i,0} + v_{r,0} = v_{t,0}$$

À l'aide des impédances acoustiques, on élimine les vitesses (attention au signe « - » pour l'onde réfléchie) :

$$P_{i,0} + P_{r,0} = P_{t,0} \quad \text{et} \quad \frac{P_{i,0}}{Z_1} - \frac{P_{r,0}}{Z_1} = \frac{P_{t,0}}{Z_2}$$

La résolution du système permet de déterminer les coefficients de réflexion et de transmission pour la surpression :

$$t = \frac{P_{t,0}}{P_{i,0}} = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad \Leftrightarrow \quad r = \frac{P_{r,0}}{P_{i,0}} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

- D'après les résultats du I.B.2, on sait que les intensités acoustiques des différentes ondes progressives valent respectivement :

$$I_i = \frac{|P_{0,i}|^2}{2Z_1}, \quad I_r = \frac{|P_{0,r}|^2}{2Z_1}, \quad I_t = \frac{|P_{0,t}|^2}{2Z_2}$$

Les coefficients de réflexion et de transmission pour la surpression étant réels, on peut identifier les rapports des amplitudes complexes aux rapports des amplitudes :

$$\rightarrow T = \frac{I_t}{I_i} = \frac{Z_1}{Z_2} t^2 = \frac{Z_1}{Z_2} \frac{4Z_2^2}{(Z_1 + Z_2)^2} \Rightarrow T = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}$$

$$\rightarrow R = \frac{I_r}{I_i} = r^2 \Rightarrow R = \frac{(Z_1 - Z_2)^2}{(Z_1 + Z_2)^2}$$

4. Application numérique :

$$T = \frac{4 \times 410 \times 1,5 \times 10^6}{(1,5 \times 10^6 + 410)^2} \Rightarrow T = 1,1 \times 10^{-3}$$

$$R \simeq 0,999.$$

L'intensité acoustique est divisée par un facteur 1000 et le niveau acoustique atténué de 30 dB. Ceci s'explique par des impédances très différentes pour l'eau et pour l'air.

5. On peut penser que **la chaîne d'osselets doit permettre de pallier ce défaut.**

II.B - La chaîne d'osselets

1. Appelons p_1 la surpression de l'oreille externe, S_1 la surface du tympan, p_2 la surpression de l'oreille interne et S_2 la surface de la platine de l'étrier.

Les forces de pression valent respectivement $F_1 = p_1 S_1$ et $F_2 = p_2 S_2$. Si on néglige la masse de l'enclume, les moments des forces sur l'enclume s'égalisent, l'angle des deux bras de levier étant le même, on peut ne pas en tenir compte et l'égalité des moments conduit à :

$$p_1 S_1 d_1 = p_2 S_2 d_2 \Rightarrow \frac{p_2}{p_1} = \frac{S_1 d_1}{S_2 d_2}$$

$$\text{Application numérique : } \frac{p_2}{p_1} = 20 \times 1,3 \Rightarrow \frac{p_2}{p_1} = 26.$$

2. Ce qui donne pour le gain acoustique en décibel de la chaîne d'osselets :

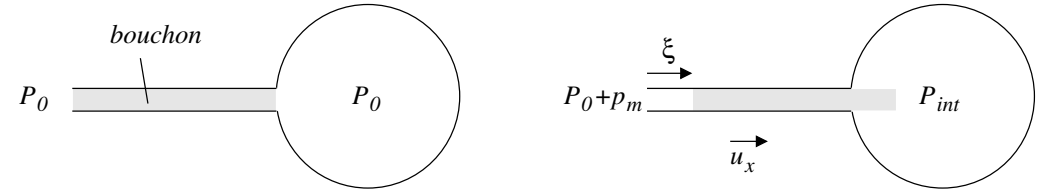
$$I_{dB} = 10 \log \left(\frac{p_2^2}{p_1^2} \right) = 10 \log (26^2) \Rightarrow I_{dB} = 28 \text{ dB}$$

Ce gain doit être mis en comparaison de la perte de 30 dB de la partie précédente.

3 L'oreille interne

III.A.

On applique la relation fondamentale de la dynamique au bouchon de fluide, c'est à dire au fluide situé au repos dans le tube. Selon la direction du tube, ce bouchon, de masse $\rho_0 l s$, est soumis aux forces de pression extérieures et intérieures :



bouchon au repos

bouchon en mouvement

$$\rho_0 s l_0 \frac{d^2 \xi}{dt^2} = -P_{int} s + (P_0 + p_m(t)) s$$

Pour l'air intérieur assimilé à un gaz parfait et subissant une évolution isentropique, on applique la loi de Laplace :

$$P_{int} V^\gamma = P_0 V_0^\gamma \quad P_{int} = \frac{P_0 V_0^\gamma}{V^\gamma} = \frac{P_0 V_0^\gamma}{(V_0 - \xi s)^\gamma} = \frac{P_0 V_0^\gamma}{V_0^\gamma (1 - \xi s / V_0)^\gamma} = \frac{P_0}{(1 - \xi s / V_0)^\gamma}$$

Le volume de la cavité est supposé très grand vis à vis du volume du tube, on peut donc effectuer un développement à l'ordre 1 en $\xi s / V_0$:

$$P_{int} \approx P_0 \left(1 + \frac{\gamma \xi s}{V_0} \right)$$

En reportant dans l'équation du mouvement, on en déduit :

$$\rho_0 s l_0 \frac{d^2 \xi}{dt^2} = -P_0 s - P_0 \frac{\gamma \xi s^2}{V_0} + P_0 s + p_m(t) s$$

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} + \frac{P_0 \gamma}{\rho_0} \frac{s}{V_0 l_0} \xi = \frac{p_m(t)}{\rho_0 l_0} \Rightarrow \frac{d^2 \xi}{dt^2} + \frac{c^2 s}{V_0 l_0} \xi = \frac{p_m(t)}{\rho_0 l_0}$$

où l'on a utilisé la relation de la première partie $c^2 = P_0 \gamma / \rho_0$.

L'équation du mouvement est celle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre

pre $\omega^2 = \frac{c^2 s}{V_0 l_0}$. Le système entre en résonance s'il est excité à cette fréquence.

III.B.

On constate que **les caractéristiques géométriques du résonateur modifient la fréquence de résonance.** La forme de la membrane basilaire va donc jouer sur les fréquences sélectionnées au sein du limaçon cependant le schéma du document 1 ne permet pas de se faire une idée très précise de la forme de cette membrane.

III.C.

Pour un système masse-ressort $\omega_0^2 = k/m$ avec k la constante de raideur du ressort.

La fréquence propre du système, et ainsi sa sélectivité en fréquence, dépend donc de sa rigidité.

4 L'influx nerveux

IV.A. Modèle électrique des fibres nerveuses

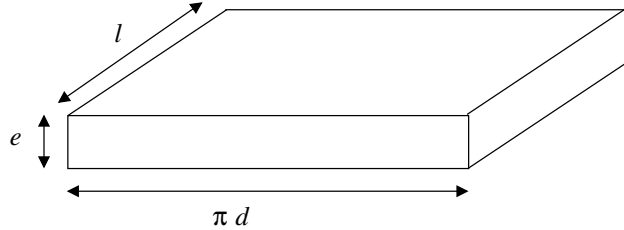
- Pour un tube de longueur l_a , de résistivité ρ_a et de section $s = \frac{\pi d^2}{4}$, la résistance électrique est donnée par $R_a = \frac{\rho_a l_a}{s}$, ce qui donne pour la résistance par unité de longueur :

$$r_a = \frac{R_a}{l_a} \Rightarrow r_a = \frac{4\rho_a}{\pi d^2}$$

A.N. (en tenant compte d'une donnée à 1 chiffre significatif) :

$$r_a = \frac{4 \times 0,5}{\pi \times (10^{-5})^2} \Rightarrow r_a = 6,3 \times 10^9 \Omega \cdot \text{m}^{-1} \approx 6 \times 10^9 \Omega \cdot \text{m}^{-1}$$

- Avec $e \ll d$, on peut supposer que les surfaces intérieure et extérieure sont quasi-identiques et se ramener au cas du **modèle du condensateur plan**.
- Dans le cas d'un modèle plan, le système se représente ainsi :



→ La capacité d'un condensateur plan de surface S et d'épaisseur e est donnée par $C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$, ce qui dans le cas présent conduit à :

$$C = \frac{\epsilon_0 \pi d \times l}{e}$$

Ce qui donne pour la capacité par unité de longueur, en tenant compte de la permittivité relative :

$$c_m = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 \pi d}{e}$$

A.N. (en tenant compte d'une donnée à 1 chiffre significatif) :

$$c_m = \frac{8 \times 8,85 \times 10^{-12} \times 10^{-5}}{7 \times 10^{-9}} \Rightarrow c_m = 3,2 \times 10^{-7} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1} \approx 3 \times 10^{-7} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$$

→ La résistance de la membrane est donnée par $R_m = \frac{\rho_m \times e}{\pi \times d \times l}$ et donc pour la conductance $G_m = \frac{\pi \times d \times l}{\rho_m \times e}$ et donc pour la conductance par unité de longueur :

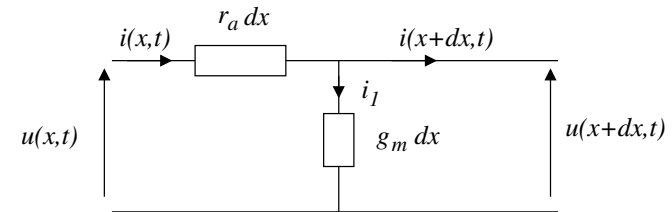
$$g_m = \frac{\pi d}{\rho_m e}$$

A.N. (en tenant compte d'une donnée à 1 chiffre significatif) :

$$g_m = \frac{\pi \times 10 \times 10^{-6}}{7,1 \times 10^4 \times 7 \times 10^{-9}} \Rightarrow g_m = 63 \text{ mS} \cdot \text{m}^{-1} \approx 6 \times 10^{-2} \text{ mS} \cdot \text{m}^{-1}$$

IV.B. Constante d'espace

- En régime permanent, le **condensateur chargé se comporte comme un interrupteur ouvert**, placé en parallèle, on peut le supprimer pour cette étude :



- La loi des mailles conduit à :

$$u(x) = r_a dx \times i(x) + u(x + dx) \Rightarrow \underbrace{r_a i(x)}_{\text{ordre 1}} + \frac{du}{dx} = 0$$

La loi des nœuds conduit à :

$$i(x) = i_1 + i(x + dx) = g_m dx \times u(x + dx) + i(x + dx) \Rightarrow \underbrace{g_m u(x)}_{\text{ordre 1}} + \frac{di}{dx} = 0$$

En combinant les deux équations, on obtient : $\frac{d^2 u(x)}{dx^2} - r_a g_m u(x) = 0$.

Par homogénéité de l'équation différentielle, le produit $r_a g_m$ est nécessairement l'inverse d'une longueur au carré, on pose :

$$\lambda^2 = \frac{1}{r_a g_m} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\sqrt{r_a g_m}}$$

Application numérique :

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{6,3 \times 10^9 \times 63 \times 10^{-3}}} \Rightarrow \lambda = 5 \times 10^{-5} \text{ m}$$

- La solution générale de cette équation est de la forme :

$$u(x) = Ae^{-x/\lambda} + Be^{x/\lambda}$$

En supposant la taille de l'axone très grande devant la constante d'espace, on considère le milieu semi-infini, ce qui impose alors $B = 0$. La condition en $x = 0$ impose alors :

$$u(x) = u(0) \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right)$$

λ représente la **distance caractéristique d'amortissement du signal**.

4. On peut appliquer le résultat précédent en considérant que la conductance de fuite g_m est modifiée en g'_m par la présence de la myéline. Par intersection de la tangente à l'origine avec l'axe des abscisses, on en déduit $\lambda' \approx 0,70$ mm, ce qui donne :

$$\lambda'^2 = \frac{1}{r_a g'_m} \quad g'_m = \frac{1}{r_a \lambda'^2} = \frac{1}{6,3 \times 10^9 \times (7,0 \times 10^{-4})^2} \quad \boxed{g'_m = 3,2 \times 10^{-4} \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}}$$

Du point de vue de la résistance de fuite (courant radial) la myéline et la membrane sont en série, la résistance équivalente est égale à la somme des résistances et la conductance équivalente s'obtient en considérant les inverses, en appelant $g_{m,2}$ la conductance linéique de la myéline :

$$\frac{1}{g'_m} = \frac{1}{g_m} + \frac{1}{g_{m,2}}$$

Avec $g_m \gg g'_m$, $1/g_m \ll 1/g'_m$, ce qui donne $\boxed{g_{m,2} \approx g'_m}$.

IV.C. Régime variable

1. En appelant i_c l'intensité du courant dans la branche du condensateur et i_g celle dans la branche de la conductance linéique g'_m , toutes deux définies en convention récepteur par rapport à $u(x+dx, t)$, la loi des nœuds conduit à :

$$i(x, t) = i_c + i_g + i(x+dx, t) \quad \Rightarrow \quad \boxed{0 = c_m \frac{\partial u}{\partial t} + g'_m u(x, t) + \frac{\partial i}{\partial x}}$$

Loi des mailles :

$$u(x, t) = r_a dx \times i(x, t) + u(x+dx, t) \quad \Rightarrow \quad \boxed{0 = \frac{\partial u}{\partial x} + r_a i(x, t)}$$

En combinant les deux équations, on obtient l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la tension :

$$\boxed{c_m \frac{\partial u}{\partial t} + g'_m u - \frac{1}{r_a} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0}$$

2. Pour l'onde plane proposée, les amplitudes des deux premiers termes de l'équation valent :

$$c_m \frac{\partial u}{\partial t} \propto c_m \omega u_0 \quad \text{et} \quad g'_m u \propto g'_m u_0$$

Obtenir l'équation proposée nécessite donc :

$$c_m \omega u_0 \gg g'_m u_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{c_m \omega \gg g'_m}$$

Application numérique : la condition impose,

$$f \gg \frac{g'_m}{c_m \times 2\pi} = \frac{2,5 \times 10^{-4}}{2\pi \times 3,2 \times 10^{-7}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{f \gg 100 \text{ Hz}}$$

On peut donc retenir une gamme de fréquence au moins de l'ordre du kilohertz, ce qui n'est pas le cas de tous les signaux audibles.

3. L'équation proposée est une équation qui caractérise un **phénomène de diffusion**. On retrouve le même type d'équations aux dérivées partielles pour la conduction thermique, la diffusion de particules par exemple.

4. Pour l'onde plane progressive harmonique proposée $u(x, t) = u_0 e^{j(\omega t - kx)}$, l'équation de diffusion conduit à la relation de dispersion :

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = r_a c_m \frac{\partial u}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad -k^2 = r_a c_m \times j\omega \quad \Rightarrow \quad \boxed{k^2 = -j r_a c_m \omega}$$

On détermine alors le vecteur d'onde (avec $-j = e^{-j\pi/2}$) :

$$\underline{k} = \pm \sqrt{r_a c_m \omega} e^{-j\pi/4} = \pm \sqrt{r_a c_m \omega} \left(\frac{1-j}{\sqrt{2}} \right) \quad \Rightarrow \quad |\mathcal{R}_e(k)| = \sqrt{\frac{r_a c_m \omega}{2}}$$

On obtient alors la vitesse de l'onde selon :

$$d|\mathcal{R}_e(k)| = \sqrt{\frac{r_a c_m}{2}} \frac{1}{2\sqrt{\omega}} d\omega \quad \Rightarrow \quad v_g = \frac{d\omega}{d|\mathcal{R}_e(k)|} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_g = 2\sqrt{\frac{2\omega}{r_a c_m}}}$$

5. Le vecteur d'onde s'écrit (selon le sens de propagation) :

$$\underline{k} = \pm \sqrt{r_a c_m \omega} \left(\frac{1-j}{\sqrt{2}} \right) = \pm \left(\frac{1-j}{\delta} \right) \quad \text{avec} \quad \boxed{\delta = \sqrt{\frac{2}{r_a c_m \omega}}}$$

$\delta = 1/|\text{Im}(k)|$ représente la distance caractéristique d'atténuation de l'onde. Cette atténuation s'explique par une absorption du fait du caractère résistif de l'axone.

IV.D. Ça brûle

L'énoncé indique que $c_{m,\text{douleur}} < c_{m,\text{chaleur}}$; la vitesse de l'onde variant comme $1/\sqrt{c_m}$, on en déduit que :

$$\boxed{v_{g,\text{douleur}} > v_{g,\text{chaleur}}}$$

On ressent la douleur avant la sensation de chaud.