

Devoir surveillé n°05 (correction)

1 Pb 1. Rendement d'un réseau (X-ENS, PSI, 2018)

Q.1 L'intensité du courant est la même en tout point d'un fil si on peut négliger l'effet de retard dû à la propagation. Ce régime s'appelle l'**ARQS** et nécessite $d \ll \lambda$ avec λ la longueur d'onde et d la taille caractéristique du circuit.

Q.2 L'hypothèse $u_s(t) = u_d(t)$ revient à **négliger la chute de tension due à la résistance de la ligne** vis à vis de l'amplitude de la tension de la source.

Q.3 Résistivité non nulle du fil électrique générant un effet Joule.

Q.4 Par définition, la grandeur I telle que $I = \sqrt{\langle i^2(t) \rangle}$ est la **l'intensité efficace**.

Q.5 Pour une ligne de longueur $2d$ (aller-retour), et un matériau de section S et de conductivité électrique σ , la puissance instantanée dissipée par effet Joule s'écrit :

$$p_L(t) = \frac{2d}{\sigma S} i^2(t)$$

Le coefficient K dépend donc de la **conductivité électrique du fil et de la section de celui-ci**.

Q.6 Si l'installation est constituée de **composants électriques ayant une caractéristique linéaire**, une excitation en tension sinusoïdale assure une réponse en courant sinusoïdale.

Pour le réseau électrique européen, la tension efficace, au niveau de l'installation vaut $U_0 \approx 220 - 230 \text{ V}$ et la fréquence 50 Hz .

Avec une célérité des ondes électromagnétiques dans le fil voisine de la vitesse de la lumière dans le vide, on en déduit :

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{50} \Rightarrow \lambda \approx 6,0 \times 10^3 \text{ km}$$

L'approximation de l'ARQS est donc valable à l'échelle d'une région.

Q.7 La grandeur efficace précédemment notée I est maintenant notée I_0 donc $P_L = KdI_0^2$.

De plus la puissance dissipée par l'installation s'exprime selon $P = U_0 I_0 \cos(\varphi)$ soit : $I_0 = \frac{P}{U_0 \cos(\varphi)}$. En conséquence :

$$\eta = \frac{P}{P + KdI_0^2} \Rightarrow \eta = \frac{1}{1 + \frac{KdP}{U_0^2 \cos^2(\varphi)}}$$

Q.8 P , $\cos(\varphi)$, d et K étant supposées fixées, il faut augmenter U_0 pour réduire les pertes en ligne et améliorer le rendement. Cela nécessite un **transformateur élévateur** à la sortie de la source et un second **transformateur abaisseur** en amont de l'installation pour abaisser la tension. Sur les lignes haute tension, la tension efficace vaut 400 kV.

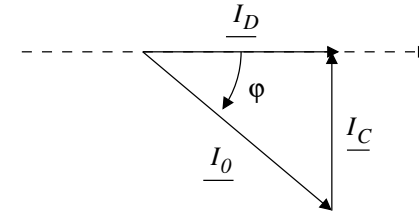
Q.9 i_c doit être en **quadrature de phase avec la tension** u_D , c'est à dire $\varphi_c = \pi/2$ [π] pour que la puissance consommée par le dispositif soit nulle.

Q.10 Si $P_c = 0$, l'expression de η est identique et il s'agit de maximiser $\cos(\varphi)$ pour optimiser le rendement, cela impose $\varphi = 0$ de telle façon que $i_D(t)$ et $u_D(t)$ soient en phase.

Le courant $i_D(t)$ a pour expression :

$$i_D(t) = i(t) + i_C(t) = I_0 \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi) + I_C \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_c)$$

La référence de phase étant prise sur la tension, il s'agit de ramener le courant \underline{I}_D sur l'axe des abscisses dans une représentation de Fresnel :



Ce qui impose : $\varphi_c = \pi/2$ et $I_C = I_0 |\sin(\varphi)|$.

Q.11 Le composant qui répond aux critères précédents est un **condensateur**. Pour une tension U_0 à ses bornes la grandeur efficace du courant est donnée par $I_C = C\omega U_0$, c'est à dire en considérant le résultat précédent :

$$C\omega U_0 = I |\sin(\varphi)| \Leftrightarrow C = \frac{I |\sin(\varphi)|}{2\pi f U_0}$$

Enfin avec $P = U_0 I \cos(\varphi)$, on en déduit :

$$C = \frac{P |\tan(\varphi)|}{2\pi f U_0^2}$$

Q.12 Les bobines du stator du moteur synchrone donnent au moteur un **caractère inductif** donc $X > 0$ (à ce stade les pertes sont négligées d'où le caractère

purement imaginaire).

La rotation du rotor engendre un phénomène d'induction dans le stator responsable de la force contre-électromotrice. On peut régler E en jouant sur l'intensité du courant au sens de l'inducteur qui modifiera le champ rotorique.

Dans le cas d'un moteur **synchrone**, le rotor tourne à la fréquence de la tension excitatrice, le flux rotorique générant l'induction dans le stator évolue donc aussi à la fréquence du réseau.

Q.13 Le moteur est soumis à la tension $u_D(t) = U_0\sqrt{2} \cos(\omega t)$, la loi des mailles pour le compensateur s'écrit :

$$U_0 = jXI_C + \underline{E}$$

Le compensateur jouant un rôle identique à celui du condensateur, le courant $\underline{I}_C = jI_C$ est un imaginaire pur (Cf. schéma de Fresnel de la question 10) afin de ramener le courant de la ligne en phase avec la tension, ce qui implique :

$$U_0 = -XI_C + \underline{E} \Leftrightarrow \underline{E} = U_0 + XI_C$$

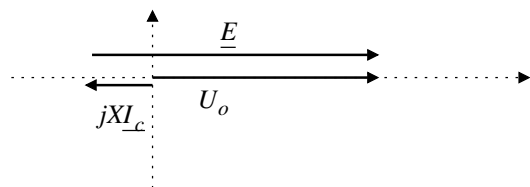
D'après les questions 10 et 11, $I_C = I |\sin(\varphi)| = \frac{P |\tan(\varphi)|}{U_0}$, on en déduit :

$$\underline{E} = E = U_0 + \frac{PX |\tan(\varphi)|}{U_0}$$

On note que la force contre-électromotrice $e(t)$ est en phase avec la tension $u_d(t)$, $i_c(t)$ étant en quadrature de phase avec cette même tension, le moteur n'absorbe pas d'énergie en conformité avec le fait qu'il fonctionne « à vide » en l'absence de pertes.

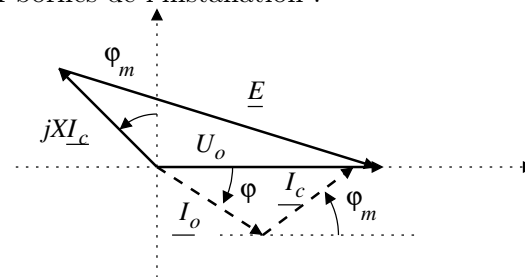
Q.14 Compte tenu de la représentation de jXI_C qui fait un angle $\pi/2 + \varphi_m$ avec l'axe des abscisses, φ_m représente l'avance de phase de $i_c(t)$ par rapport $u_D(t)$.

Dans le cas $P_C = 0$ (questions 10, 11, 12 et 13), $\arg(\underline{I}_C) = \pi/2 = \varphi_m$, le schéma de Fresnel est alors :



Ce schéma redonne bien sûr le résultat $E = U_0 + XI_C$.

Q.15 Commençons par ajouter \underline{I} et \underline{I}_C sur le diagramme de Fresnel en faisant en sorte que l'intensité du courant de la ligne $\underline{I}_D = \underline{I} + \underline{I}_C$ soit toujours en phase avec la tension aux bornes de l'installation :



Le théorème de Pythagore appliqué au triangle ABC conduit à :

$$E = \sqrt{(XI_C \cos(\varphi_m))^2 + (U_0 + XI_C \sin(\varphi_m))^2}$$

Pour exprimer le résultat en fonction des grandeurs demandées, on peut alors considérer les relations :

- courant de la ligne en phase avec la tension : $I_0 |\sin(\varphi)| = I_C \sin(\varphi_m)$;
- puissance moyenne dissipée par le compensateur : $P_C = U_0 I_C \cos(\varphi_m)$;
- puissance moyenne absorbée par l'installation : $P = U_0 I_0 \cos(\varphi)$.

On en déduit alors :

$$E = \sqrt{\left(U_0 + \frac{XP |\tan(\varphi)|}{U_0}\right)^2 + \left(\frac{P_C X}{U_0}\right)^2}$$

2 Autour d'une boisson énergisante (E3A, PSI, 2018)

H1. Configuration électronique Al : $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^1$.

Règles utilisées : règle de Pauli, règle de Klechkowski, règle de Hund (non utilisée ici).

H2. Les entités aluminium sont situées aux sommets et au centre de face.

- population p : les atomes aux sommets comptent pour $1/8$, ceux aux centres de faces pour $1/2$, et $p = 8 \times 1/8 + 6 \times 1/2$ $p = 4$;
- coordinence : la structure CFC est une structure compacte, chaque entité a **12 plus proches voisins**

H3. La tangence a lieu selon la diagonale de face : $a\sqrt{2} = 4r$.

H4. La masse volumique est égale à celle d'une maille qui contient 4 entités Al

en propre dans un volume a^3 :

$$\rho_{Al} = \frac{4 \times m_{\text{une entité Al}}}{a^3} \Rightarrow \boxed{\rho_{Al} = \frac{4M_{Al}}{N_A a^3}}$$

Application numérique :

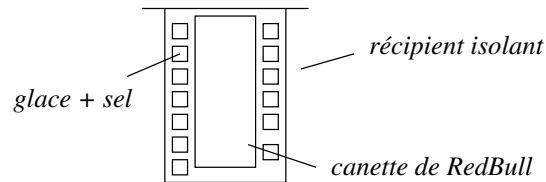
$$\rho_{Al} = \frac{4 \times 27 \times 10^{-3}}{6,02 \times 10^{23} \times (4 \times 143 \times 10^{-12} / \sqrt{2})^3} \Rightarrow \boxed{\rho_{Al} = 2,7 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}}$$

H5. Un acier a une masse volumique de l'ordre de $\rho_{\text{acier}} \approx 8 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. **La canette en aluminium est plus légère.**

I1. Résolution de problème.

Stratégie de résolution

L'idée naturelle est d'entourer la bouteille de RedBull de glace au sein d'un dispositif isolé thermiquement. L'énergie de fonte de la glace sera prise sur l'énergie thermique du liquide contenu dans la canette qui va refroidir.



La présence du sel va forcer la glace à passer sous forme liquide (cf. diagramme binaire et point eutectique) ce qui permettra un meilleur contact thermique avec la bouteille et sans doute un échange thermique plus efficace. Cependant, *in fine*, la présence de sel ne semble pas indispensable, une bouteille placée dans un bain de glace se refroidira de toute façon.

Mise en équations

On considère une masse m_g de glace prélevée dans un congélateur à une température $T_{0,g} = -20^\circ\text{C}$ et une masse de sel $m_s \approx 0,20 \times m_g$ permettant d'obtenir un mélange liquide voisin du point eutectique.

On suppose que la boisson, assimilée à une masse d'eau $m_l = 250 \text{ g}$ est initialement à $T_{0,R} = 20^\circ\text{C}$ et on souhaite une température finale $T_f = 5^\circ\text{C}$ correspond à la sortie d'un réfrigérateur.

On effectue alors un bilan enthalpique pour le système isolé constitué de la canette, de son contenu et de la glace. On néglige la capacité thermique de la canette en aluminium compte tenu de la faible masse d'aluminium vis à vis de la masse de

boisson.

- fonte de la glace : $\Delta H_1 = m_g \times l_{fus}$;
- échauffement de l'eau salée assimilée à de l'eau : $\Delta H_2 = m_g \times c_l \times (T_f - T_{0,g})$;
- refroidissement de la boisson : $\Delta H_3 = m_l \times c_l \times (T_f - T_{0,R})$.

Pour ce système isolé :

$$0 = m_g \times l_{fus} + m_g \times c_l \times (T_f - T_{0,g}) + m_l \times c_l \times (T_f - T_{0,R})$$

$$m_g = \frac{m_l \times c_l \times (T_{0,R} - T_f)}{l_{fus} + c_l \times (T_f - T_{0,g})}$$

Application numérique et analyse du résultat

$$m_g = \frac{250 \times 4,2 \times 10^3 \times (20 - 5)}{3,3 \times 10^5 + 4,2 \times 10^3 \times (5 - (-20))} = 36 \text{ g}$$

On peut donc retenir d'utiliser une masse de glace $m_g \approx 40 \text{ g}$ et une masse de sel $m_{\text{sel}} \approx 8 \text{ g}$.

Nous n'avons pas tenu compte de l'énergie nécessaire à la dissolution du sel dans l'eau, réaction endothermique qui contribuerait à refroidir un peu plus la boisson. Il y a aussi de l'air qui entoure la glace dans le récipient mais sa faible capacité thermique aura peu d'influence sur le résultat.

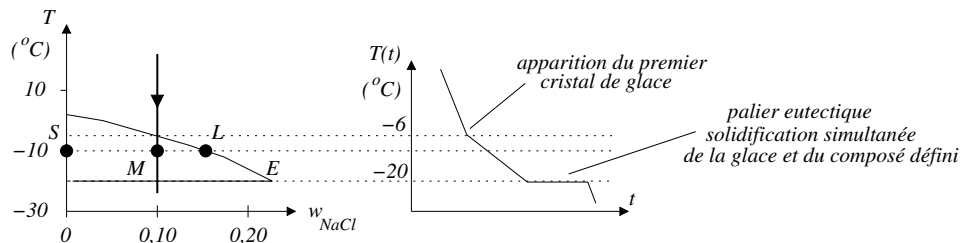
I2. La phase liquide homogène contient de l'eau liquide, des ions Na^+ et des ions Cl^- .

Le domaine « liquide+glace » contient deux phases : la phase liquide précédemment citée et de l'eau pure solide.

Pour le domaine liquide, il y a cinq paramètres intensifs : pression, température et les trois fractions massiques au sein de la phase liquide : $w_{\text{Na}^+}^l, w_{\text{Cl}^-}^l, w_{\text{H}_2\text{O}}^l$ et deux relations entre ces paramètres : $w_{\text{Na}^+}^l + w_{\text{Cl}^-}^l + w_{\text{H}_2\text{O}}^l = 1$ et $w_{\text{Na}^+}^l = w_{\text{Cl}^-}^l$ (les deux entités étant introduites en même proportion lors de la dissolution du sel dans l'eau). **La variance est donc égale à 3.**

Pour le domaine « liquide+glace », il y a cinq paramètres intensifs : pression, température et les trois fractions massiques au sein de la phase liquide : $w_{\text{Na}^+}^l, w_{\text{Cl}^-}^l, w_{\text{H}_2\text{O}}^l$ et trois relations entre ces paramètres : $w_{\text{Na}^+}^l + w_{\text{Cl}^-}^l + w_{\text{H}_2\text{O}}^l = 1$, $w_{\text{Na}^+}^l = w_{\text{Cl}^-}^l$ et $\mu_{\text{H}_2\text{O}}^l = \mu_{\text{H}_2\text{O}}^s$ (traduisant l'équilibre de solidification de la glace). **La variance est donc égale à 2.**

I3. Courbe de refroidissement :



On part de 1,0 g de sel et 9,0 g d'eau. À la température de -10°C , le théorème des moments conduit à :

$$m_s \times 0,10 = m_l \times 0,06 \Leftrightarrow m_s = 0,60m_l$$

Pour une masse totale introduite de 10 g, on en déduit la présence d'une masse solide de 3,7 g et d'une masse liquide de 6,3 g. Le solide étant de la glace pure, on en déduit pour la composition du système :

- **3,7 g de glace solide ;**
- **6,3 g de liquide contenant 5,3 g d'eau et 1,0 g de sel.**

J4. Pour 100 g de composé, une fraction $w_{\text{NaCl}} = 0,62$ implique une masse de sel $m_{\text{NaCl}} = 62$ g et d'eau $m_{\text{H}_2\text{O}} = 38$ g. Compte tenu des masses molaires, cela représente : $n_{\text{NaCl}} \approx 1,06$ mol et $n_{\text{H}_2\text{O}} \approx 2,11$ mol. **Les quantité de matières sont dans un rapport 2 conformément à la formule chimique.**

J1. Nombres d'oxydation de l'iode dans les entités suivantes :

| entités | I^- | I_2 | IO_3^- |
|--------------------|--------------|--------------|-----------------|
| nb. oxydation iode | -I | 0 | +V |
| domaines | 3 | 2 | 1 |

Les domaines correspondant aux potentiels les plus élevés sont associés au nombre d'oxydation le plus élevé de l'iode.

J2. Partant de la demi-équation : $\text{I}_{2(\text{aq})} + 2\text{e}^- = 2\text{I}_{(\text{aq})}^-$, on en déduit l'équation de la droite frontière avec, d'après la convention $[\text{I}_2]_f = [\text{I}^-]_f = c_t$:

$$E_{2-3} = E^\circ(\text{I}_2/\text{I}^-) + \frac{0,06}{2} \log \left(\frac{[\text{I}_2]_f}{[\text{I}^-]_f^2} \right) = E^\circ(\text{I}_2/\text{I}^-) - 0,03 \log(c_t)$$

$$E_{2-3} = 0,62 + 0,03 \Rightarrow \boxed{E_{2-3} = 0,65 \text{ V}}$$

J3. Partant de la demi-équation : $2\text{IO}_3^- + 12\text{H}^+ + 10\text{e}^- = \text{I}_{2(\text{aq})} + 6\text{H}_2\text{O}_{(\text{l})}$, on en déduit l'équation de la droite frontière :

$$E_{1-2} = E^\circ(\text{IO}_3^-/\text{I}_2) + \frac{0,06}{10} \log \left(\frac{[\text{IO}_3^-]_f^2 [\text{H}^+]^{12}}{[\text{I}_2]_f} \right)$$

$$\Leftrightarrow E_{1-2} = E^\circ(\text{IO}_3^-/\text{I}_2) - \frac{0,06 \times 12}{10} \text{pH} + \frac{0,06}{10} \log(c_t)$$

$$E_{1-2} = 1,19 - 0,006 - 0,072 \text{pH} \Rightarrow \boxed{E_{1-2} = 1,18 - 0,072 \text{pH}}$$

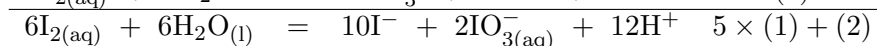
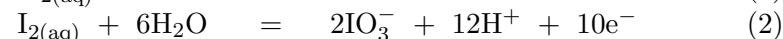
J4. Le système d'équations conduit à :

$$1,18 - 0,072 \text{pH} = 0,65 \Leftrightarrow \text{pH} = 7,4$$

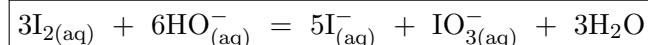
Ce qui donne pour les coordonnées : $\{\text{pH} = 7,4; E = 0,65 \text{ V}\}$ **en accord avec le diagramme.**

K1. La décoloration de la solution indique la **disparition du diiode en milieu basique conformément au diagramme E-pH.**

Partant des demi-équations équilibrées en milieu acide, on en déduit l'équation de la réaction :

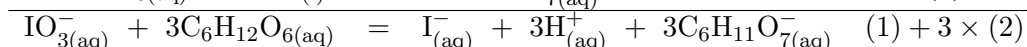
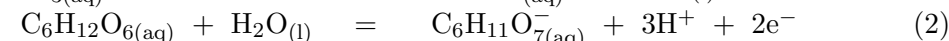


On divise alors par deux et on équilibre finalement avec des ions hydroxyde :

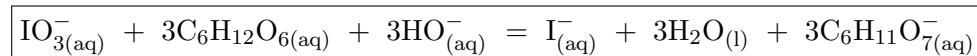


K2. On observe la **dismutation** du diiode. La dismutation est une réaction dans laquelle une espèce chimique joue à la fois le rôle d'oxydant et de réducteur. Lors de la transformation l'espèce dans laquelle l'élément est à un degré d'oxydation donné fournit deux espèces dans lesquelles l'élément est à des degrés d'oxydation plus et moins grands.

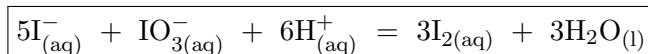
K3. On procède comme précédemment en équilibrant les demi-équations en milieu acide avant de passer en milieu basique :



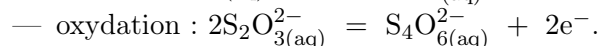
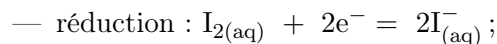
Et finalement :



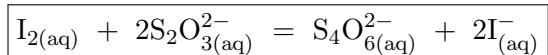
K4. La réaction de l'étape 4 est la réaction inverse de l'étape 2. Il s'agit de la **médiamutation** de I^- et IO_3^- en diiode par passage en milieu acide :



K5. À partir des demi-équations :



On en déduit la réaction de dosage :



K6. On exprime les potentiels d'électrode à l'aide de la formule de Nernst :

— I_2/I^- : $E_1 = E^\circ(I_2/I^-) + \frac{0,06}{2} \log \left(\frac{[I_2]}{[I^-]^2} \right)$;

— $S_4O_6^{2-}/S_2O_3^{2-}$: $E_2 = E^\circ(S_4O_6^{2-}/S_2O_3^{2-}) + \frac{0,06}{2} \log \left(\frac{[S_4O_6^{2-}]}{[S_2O_3^{2-}]^2} \right)$;

L'équilibre impose l'égalité des potentiels d'électrode, on en déduit :

$$E^\circ(I_2/I^-) + \frac{0,06}{2} \log \left(\frac{[I_2]_{eq}}{[I^-]_{eq}^2} \right) = E^\circ(S_4O_6^{2-}/S_2O_3^{2-}) + \frac{0,06}{2} \log \left(\frac{[S_4O_6^{2-}]_{eq}}{[S_2O_3^{2-}]_{eq}^2} \right)$$

$$\Leftrightarrow E^\circ(I_2/I^-) - E^\circ(S_4O_6^{2-}/S_2O_3^{2-}) = \frac{0,06}{2} \log \left(\frac{[S_4O_6^{2-}]_{eq}[I^-]_{eq}^2}{[S_2O_3^{2-}]_{eq}^2[I_2]_{eq}} \right)$$

$$\Leftrightarrow K^\circ = 10^{\frac{2[E^\circ(I_2/I^-) - E^\circ(S_4O_6^{2-}/S_2O_3^{2-})]}{0,06}}$$

Application numérique :

$$K^\circ = 10^{2 \times (0,62 - 0,09) / 0,06} \Rightarrow K^\circ = 4,6 \times 10^{17}$$

$K^\circ \gg 1$, la réaction peut être considérée totale ce qui est une condition nécessaire pour une réaction de titrage.

J1. $n_1 = c_1 V_1$.

J2. Lors du titrage, une entité I_2 réagit avec deux entités $S_2O_3^{2-}$; la quantité de diiode présente avant le titrage est donc égale à la moitié du nombre de moles de thiosulfate versé à l'équivalence :

$$n_2 = \frac{c_2 V_2}{2}$$

J3. D'après l'équation de la réaction (K1), le nombre de moles d'ions iodate formé à l'étape 2 est égal au tiers du nombre de moles de diiode initialement introduit : $n_{IO_3^-}^f = n_1/3$.

Le nombre de moles d'ions iodate encore présent après l'étape 3 est égal au tiers du nombre de moles de diiode qui sera consommé dans l'étape de titrage (équation de la question K4), donc $n_{IO_3^-}^r = n_2/3$.

Le nombre de moles d'ions iodate ayant réagi avec le glucose est la différence du nombre de moles formé dans l'étape 2 et du nombre de moles consommé dans l'étape 4, en conséquence :

$$n_3 = \frac{n_1 - n_2}{3}$$

Enfin lors de l'étape 3, (équation de la question K3), trois entités glucose réagissent pour une entité iodate, en conséquence :

$$n_0 = 3n_3 \Rightarrow n_0 = n_1 - n_2$$

J4. En utilisant les relations précédemment obtenues, on en déduit :

$$n_0 = n_1 - n_2 = c_1 V_1 - \frac{c_2 V_2}{2} \Rightarrow c_0 = \frac{c_1 V_1 - c_2 V_2 / 2}{V_0}$$

Application numérique (remarque : contrairement à l'énoncé, on considérera que les données sont fournies avec deux chiffres significatifs pour préserver une certaine précision, compatible avec la précision d'un dosage)

$$c_0 = \frac{0,05 \times 20 - 0,10 \times 15,4/2}{2,0} \Rightarrow c_0 = 0,12 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

J5. $m = c_0 V \times M_{C_6H_{12}O_6}$.

A.N. : $m = 0,115 \times 0,250 \times (6 \times 12 + 12 \times 1,0 + 6 \times 16) \Rightarrow m = 5,2 \text{ g}$

À la précision des données (1 ou 2 chiffres significatifs) et du résultat, cette valeur est en parfaite accord avec le document indiquant 5,25 g.