

Devoir surveillé n°04 (correction)

1 Étude d'un Canadair (extrait Mines PC 2010)

Q17. Soit V_{tot} le volume d'une soute. En divisant ce volume par le débit volumique on en déduit la durée t_r du remplissage :

$$V_{tot} = s_a V \times t_r \Leftrightarrow \boxed{t_r = \frac{V_{tot}}{s_a V}}$$

$$\text{A.N. : } t_r = \frac{6,137/2}{11,8 \times 6,5 \times 10^{-4} \times (120/3,6)} \Rightarrow \boxed{t_r = 12 \text{ s}}$$

Ce qui donne pour la distance d parcourue :

$$d = \frac{120}{3,6} \times 12 \Rightarrow \boxed{d = 4,0 \times 10^2 \text{ m}}$$

Q18. a. L'écoulement étant incompressible (eau), le **débit volumique se conserve** entre l'entrée (A) et la sortie (B) de l'auget : $v_A S_A = v_B S_B$.

L'écoulement est supposé stationnaire et, comme expliqué, incompressible. On se place dans le référentiel galiléen associé à l'avion (mouvement inertiel par rapport au référentiel terrestre lui-même supposé galiléen) et on néglige les effets dissipatifs. Les conditions sont réunies pour **appliquer la relation de Bernoulli** sur une ligne de courant allant de l'arrivée sur l'auget à la sortie de l'auget :

$$\frac{v_A^2}{2} + \frac{P_A}{\rho} + gz_A = \frac{v_B^2}{2} + \frac{P_B}{\rho} + gz_B$$

Le jet étant à l'air libre en entrée et en sortie, on peut supposer $P_A = P_B = P_0$ la pression atmosphérique. La variation d'énergie potentielle massique est de l'ordre de $g(z_B - z_A) \approx 5 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$; ce terme est tout à fait négligeable devant le terme cinétique $\frac{v_A^2}{2} \approx 5 \times 10^2 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$.

Compte tenu de ces éléments, on peut conclure à $V_A \approx V_B$, relation qui combinée à la conservation du débit volumique assure $\boxed{S_A = S_B}$, c'est à dire que **la section du jet est identique en entrée et en sortie**.

Q18. b. Considérons une **première situation sans écopage**, l'auget est seul à l'équilibre dans le référentiel de l'avion. Il est soumis à son poids \vec{P} , à \vec{F}_1 l'action de la structure de l'avion sur l'auget et à la résultante des forces de pression \vec{F}_p . La

pression étant uniforme sur l'auget, la résultante des forces de pression est nulle et on en déduit $\vec{P} + \vec{F}_1 = \vec{0}$ (relation 1).

On considère alors la **situation d'écopage** avec comme nouveau **système fermé** {l'auget, l'eau au contact de l'auget et l'eau qui s'apprête à entrer en contact avec l'auget pendant dt }. On applique pour ce système un bilan de quantité de mouvement entre t et $t + dt$ dans le **référentiel de l'avion**. Les forces extérieures s'appliquant sur le système sont le poids \vec{P} de l'auget, \vec{F}_2 la nouvelle action de la structure de l'avion sur l'auget et la résultante des forces de pression \vec{F}_p toujours nulle (on néglige le poids de l'eau). On notera avec un indice (e) les grandeurs en entrée et un indice (s) les grandeurs en sortie.

En régime stationnaire, la quantité d'eau qui entre pendant dt dans la structure de contrôle doit sortir pendant cette même durée, en conséquence $\delta m_s = \delta m_e = D_m dt = \rho s_a V dt$. De plus, l'application de la relation de Bernoulli assure que la vitesse d'entrée est égale à la vitesse en sortie en norme.

$$d\vec{p} \underset{\text{régime stationnaire}}{=} \delta\vec{p}_s - \delta\vec{p}_e = \delta m_s V \vec{u}_x - \delta m_e V (-\vec{u}_x) = 2\rho s_a V^2 dt \vec{u}_x$$

Avec $d\vec{p} = 2\rho s_a V^2 dt \vec{u}_x = [\vec{P} + \vec{F}_2] dt$ (relation 2).

La comparaison des relations (1) et (2) assure que la structure de l'avion doit imposer une force supplémentaire sur l'auget pour le maintenir à l'équilibre : $\vec{F}_2 - \vec{F}_1 = 2\rho s_a V^2 \vec{u}_x$. Cette force est nécessairement l'opposée de la force exercée par l'eau sur l'auget.

$$\vec{F}_{\text{eau} \rightarrow \text{auget}} = -2\rho s_a V^2 \vec{u}_x$$

$$\text{A.N. : } \|\vec{F}_{\text{eau} \rightarrow \text{auget}}\| = 2 \times 10^3 \times 11,8 \times 6,5 \times 10^{-4} \times \left(\frac{120}{3,6}\right)^2$$

$\|\vec{F}_{\text{eau} \rightarrow \text{auget}}\| \approx 17 \text{ kN}$. Cette valeur a été calculée pour un unique auget, les effets sur l'avion sont à multiplier par 2.

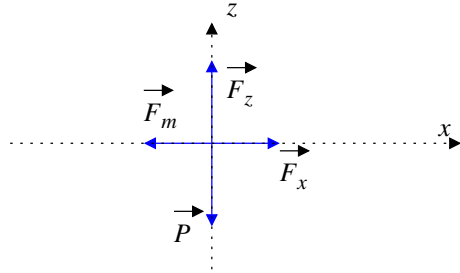
Q18. c. Cette force développe une puissance $P = -2\rho s_a V^3$ avec $\boxed{|P| = 0,57 \text{ MW}}$. On constate que la puissance correspond environ à un tiers de la puissance d'un moteur, **le pilote doit donc « remettre les gaz »** lors de l'entrée de l'eau dans les réservoirs.

Q19. Les coefficients C_x et C_z sont **sans dimension**, en effet :

$$[C_x] = \frac{[F]}{[\rho S V^2]} = \frac{\text{M} \cdot \text{L} \cdot \text{T}^{-2}}{\text{M} \cdot \text{L}^{-3} \cdot \text{L}^2 \cdot \text{L}^2 \cdot \text{T}^{-2}} = 1$$

Q20. La force \vec{F} est la **résultante des actions du fluide sur l'aile, forces de pression et forces de viscosité.**

Q21. Commençons par représenter un schéma des forces à incidence nulle pour un vol inertiel horizontal avec \vec{F}_m la force développée par les moteurs et \vec{P} le poids de l'avion.



Si on augmente la puissance fournie par les moteurs, la vitesse de l'avion augmente. La force de portance augmente et **l'avion gagne de l'altitude.**

Q22. D'après la formule des gaz parfaits : $\rho_0 = \frac{p_0 M}{RT_0}$.

A.N. : $\rho_0 = \frac{1013 \times 10^2 \times (0,20 \times 32 + 0,80 \times 28) \times 10^{-3}}{8,31 \times 288} \Rightarrow \rho_0 = 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

Q23. En régime inertiel pour un vol horizontal à incidence nulle la force de portance des deux ailes équilibre le poids. Si on suppose que S_a désigne bien la surface des deux ailes, on en déduit :

$$C_z = \frac{2F_z}{\rho_0 S_a V_{\max}^2} \Rightarrow C_z = \frac{2M_c g}{\rho_0 S_a V_{\max}^2}$$

Le théorème de l'énergie cinétique assure que la puissance des deux moteurs équilibre la puissance de la force de traînée de l'avion :

$$P_{\max} = F_x V_{\max} \Rightarrow C_x = \frac{2P_{\max}}{\rho_0 S_a V_{\max}^3}$$

A.N. : $C_z = \frac{2 \times 19848 \times 9,81}{1,22 \times 100,5 \times (365/3,6)^2} \Rightarrow C_z = 0,31$.

A.N. : $C_x = \frac{2 \times 2 \times 1,78 \times 10^6}{1,22 \times 100,5 \times (365/3,6)^3} \Rightarrow C_x = 0,056$.

Et pour la finesse : $f = \frac{C_z}{C_x} \Rightarrow f = 5,5$

Q24. Pour l'évolution isentropique d'un gaz parfait on peut appliquer la **loi de Laplace** exprimée à l'aide de la pression et de la masse volumique :

$$p\rho^{-\gamma} = cste \Leftrightarrow \frac{dp}{p} - \gamma \frac{d\rho}{\rho} = 0 \Leftrightarrow \frac{dp}{d\rho} = \frac{\gamma p}{\rho}$$

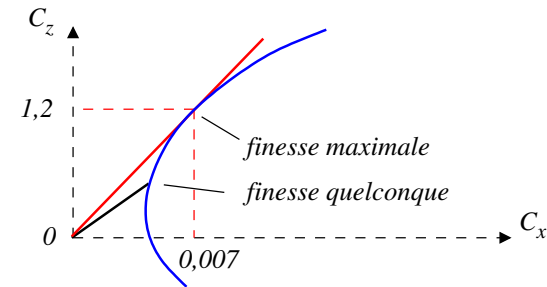
À T_0 , $V_s = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}$. A.N. : $V_s = \sqrt{\frac{1,4 \times 1,013 \times 10^5}{1,22}} \Rightarrow V_s = 3,4 \times 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Q25. Connaissant le nombre de Mach, on en déduit la vitesse : $V = 0,155 \times 340$, c'est à dire $V = 53 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 1,9 \times 10^2 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, vitesse qui paraît raisonnable pour le Canadair.

En utilisant le nombre de Reynolds, on peut déterminer la taille L caractéristique :

$$L = \frac{\nu N_R}{V} = \frac{15,6 \times 10^{-6} \times 1,5 \times 10^7}{53} \Rightarrow L = 4,4 \text{ m}$$

Cette distance est comparable à la taille de la corde de l'aile de l'avion.



La finesse maximale correspond à la droite passant par l'origine et tangente à la polaire, c'est à dire dans le cas présent :

$$f_{\max} = \frac{1,2}{0,07} \Rightarrow f_{\max} = 1,7 \times 10^2$$

Cette finesse est très supérieure à celle calculée pour le Canadair mais il faut prendre en compte le fait que le Canadair dans sa totalité est beaucoup moins profilé que la seule aile.

La finesse compare les effets de portance et les effets dus à la traînée.

On montre par exemple que dans le cas d'un planeur $f = D/H$ avec D la distance horizontale parcourue et H l'altitude initiale.

2 Le méτρο gravitationnel (extrait Mines PSI 2011)

Q1. On se place dans un système de coordonnées sphériques. Les plans $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\varphi)$ sont des plans de symétrie des masses, au point M le champ gravitationnel est contenu dans chacun de ses plans et donc selon \vec{u}_r , $\vec{g} = g(r, \theta, \varphi)\vec{u}_r$.

La distribution est invariante par toute rotation d'angle θ et φ ce qui assure que la composante radiale du champ gravitationnel est indépendante de θ et φ , en conséquence : $\vec{g} = g(r)\vec{u}_r$.

On applique alors le théorème de Gauss gravitationnel en considérant comme surface de Gauss une sphère de rayon r , avec $r < r_T$:

$$\oiint_{\Sigma} \vec{g} \cdot d\vec{S} = g(r) \times 4\pi r^2 = -4\pi G \times \frac{4\pi}{3} r^3 \times \mu_T$$

Il vient $\vec{g} = -\frac{4\pi}{3} G \mu_T r \vec{u}_r \Rightarrow \vec{g} = -\omega^2 r \vec{u}_r$.

Q2. On cherche E_p fonction des seules variables de position vérifiant :

$$m\vec{g} = -m\omega^2 r \vec{u}_r = -\text{grad} E_p$$

$$\Leftrightarrow m\omega^2 r = \frac{\partial E_p}{\partial r} \quad \text{et} \quad 0 = \frac{\partial E_p}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad 0 = \frac{\partial E_p}{\partial \varphi}$$

On retient $E_p(r) = \frac{m\omega^2 r^2}{2} + E_{p0}$ avec E_{p0} une constante.

ω est une **pulsation**, $[\omega] = \text{T}^{-1}$, ce résultat est facile à identifier sur l'expression du champ de gravitation dont on sait qu'il s'agit d'une accélération.

Q3. On étudie le mouvement de l'objet dans le référentiel géocentrique supposé galiléen. La seule force présente dérivant d'une énergie potentielle, **l'énergie mécanique du mobile se conserve** :

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m\omega^2(x^2 + h^2)}{2} = cste \quad \underbrace{\Rightarrow}_{d/dt} \quad \ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

La solution générale de cette équation différentielle est :

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

Avec $x(0) = -\sqrt{r_T^2 - h^2}$ et $\dot{x}(0) = 0$, on en déduit :

$$x(t) = -\sqrt{r_T^2 - h^2} \cos(\omega t)$$

Q4. La vitesse évolue selon : $\dot{x}(t) = \omega \sqrt{r_T^2 - h^2} \sin(\omega t)$. Cette vitesse est **maximale en norme au point H** avec $v_{\max} = \omega \sqrt{r_T^2 - h^2}$.

Q5. La durée du parcours de A à B correspond à une demi-période :

$$\tau_0 = \frac{\pi}{\omega}$$

$$\tau_0 = \frac{\pi}{\sqrt{4\pi/3 \times 6,67 \times 10^{-11} \times 5,5 \times 10^3}} \Rightarrow \tau_0 = 2,53 \times 10^3 \text{ s}$$

Q6. Le mouvement étant circulaire $r = cste$; la constante des aires $r^2\dot{\theta} = cste'$ s'applique pour un mouvement soumis à une force centrale. De la combinaison de ces deux relations, on en déduit $\dot{\theta} = cste''$ et le **mouvement est nécessairement uniforme**; la vitesse est donc celle du raccordement :

$$v = \sqrt{r_T^2 - r_H^2} \times \omega$$

Lors du mouvement circulaire de rayon r_H , $v = r_H \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{r_T^2 - r_H^2} \times \omega$, ce qui donne par intégration sur la portion circulaire :

$$\int_0^\theta d\theta = \sqrt{\frac{r_T^2}{r_H^2} - 1} \times \omega \int_0^{\tau_1} dt$$

C'est à dire : $\tau_1 = \frac{\theta}{\omega} \times f(y)$ avec $f(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}$.

Q7. Le mouvement se décompose en trois parties, l'association de la première phase A_1H_1 et de la troisième phase H_2A_2 est équivalente au parcours en ligne droite AB de durée τ_0 (question Q5.), ce qui donne pour la durée totale :

$$\tau = \tau_0 + \tau_1(y=2, \theta = \pi/3) = \frac{\pi}{\omega} + \frac{\pi/3}{\omega} \times \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tau = \frac{\pi}{\omega} \times \left(1 + \frac{1}{3\sqrt{3}}\right)$$

A.N : $\tau = 3,02 \times 10^3 \text{ s} \approx 50 \text{ minutes}$.

Visiblement, la configuration proposée ici est associée à deux points grossièrement diamétralement opposés à l'équateur, il est bien évident que même en avion **le parcours à la surface durerait au moins dix fois plus de temps**.

Q8. Pour creuser le tunnel précédent de diamètre D , il faut excaver un volume de débris :

$$V_T = \left[r_H \theta + 2\sqrt{r_T^2 - r_H^2} \right] \times \frac{\pi D^2}{4} \Rightarrow V_T = 5,5 \times 10^8 \text{ m}^3$$

Si on se souvient de la difficulté de réalisation du tunnel sous la Manche, ce projet semble plus que pharaonique et **non réaliste**.

Q9. On suppose une force de la forme $F = kL^\alpha v^\beta \rho^\gamma$ avec k une constante multiplicative adimensionnée. Une équation aux dimensions impose :

$$M \cdot L \cdot T^{-2} = L^\alpha \cdot L^\beta \cdot T^{-\beta} \cdot M^\gamma \cdot L^{-3\gamma}$$

Ces unités étant indépendantes, cela impose nécessairement : $\gamma = 1$, $\beta = 2$ et $\alpha + \beta - 3\gamma = 1$, c'est à dire $\alpha = 2$, finalement :

$$F = k\rho L^2 v^2$$

Q10. La puissance développée par la force de traînée a pour expression :

$$\mathcal{P} = F \times v = k \times \rho L^2 v^3 = k \times \frac{pM}{RT} \times L^2 v^3$$

En notant avec un indice m le cas du métro et TGV pour le train grande vitesse, on impose :

$$\mathcal{P} = k \times \frac{p_m M}{RT} \times L^2 v_m^3 = k \times \frac{p_{TGV} M}{RT} \times L^2 v_{TGV}^3$$

C'est à dire $p_m = p_{TGV} \times \left(\frac{v_{TGV}}{v_m} \right)^3$.

Avec $r_H = r_T/2$, $v_m = r_T \omega \sqrt{3}/2$, c'est à dire :

$$v_m = 6,38 \times 10^6 \times \sqrt{4\pi/3} \times 6,67 \times 10^{-11} \times 5,5 \times 10^3 \times \sqrt{3}/2 = 6,85 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$p_m = 1,00 \times 10^5 \times \left(\frac{360/3600}{6,85} \right)^3 \Rightarrow p_m \approx 0,3 \text{ Pa}$$

Cette pression réduite n'est évidemment pas envisageable à réaliser sur une telle structure.

3 Ozone et atmosphère (extrait Centrale MP 2020)

Q1. Le spectre ultra-violet débute pour des **longueurs d'onde inférieures à 400 nm** ce qui est cohérent avec les données de la figure 1.

Considérons un photon de longueur d'onde 400 nm, son énergie vaut :

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6,626 \times 10^{-34} \times 3,00 \times 10^8}{4 \times 10^{-7}} \approx 5 \times 10^{-19} \text{ eV} \Rightarrow E \approx 3 \text{ eV}$$

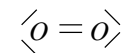
L'énergie des photons ultra-violets est d'au moins quelques eV, comparable à l'énergie de liaison des électrons du cortège électronique (Cf. énergie du niveau fondamental de l'hydrogène en annexe). Lors de l'absorption d'un tel photon, un électron peut donc être arraché et l'entité ionisée.

Q2. La figure 2 montre que, lors de la traversée de l'atmosphère, **la couche d'ozone réduit de moitié le flux de rayons UVa et totalement les UVc qui sont associés aux photons les plus énergétiques.**

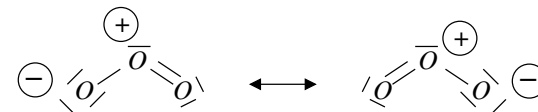
Ces rayons pénètrent en profondeur dans la peau pouvant **provoquer lésions et brûlures** et favoriser le développement de cancers, les plus énergétiques pouvant briser l'ADN et entraîner des mutations. Il est donc important que la couche d'ozone filtre ce rayonnement UV.

Q3. Pour l'oxygène $Z = 8$, configuration électronique $1s^2 2s^2 2p^4$.

Q4. L'oxygène possède 6 électrons de valence, il y a donc 12 électrons à répartir sur la structure, c'est à dire **6 doublets**. On répartit ces doublets de manière à **respecter la règle de l'octet** pour chacun des atomes d'oxygène.

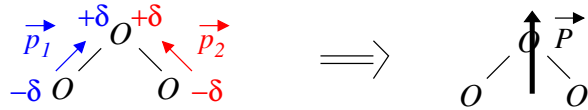


Q5. Pour la molécule d'ozone, il y a $3 \times 6 = 18$ électrons à répartir, c'est à dire **9 doublets**. On constate la présence de deux formes mésomères équiprobables. Les propositions assurent que la **règle de l'octet est vérifiée** pour chacun des atomes d'oxygène.



Q6. Les charges formelles qui apparaissent et les deux formes mésomères permettent de définir une structure équivalente moyenne où un dipôle (dirigé du pôle négatif vers le pôle positif) apparaît sur chacune des liaisons oxygène-oxygène. Le moment dipolaire \vec{P} de la molécule résulte de l'**addition vectorielle de ces**

deux dipôles élémentaires.



Q7. On commence par déterminer les grandeurs standard de réaction dans l'approximation d'Ellingham sachant que l'enthalpie standard de formation du dioxygène gazeux est nulle :

$$\begin{aligned} \Delta_r H^\circ &= 2 \times 141,9 \Rightarrow \Delta_r H^\circ = 283,8 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \\ \Delta_r S^\circ &= 2 \times 239 - 3 \times 205 \Rightarrow \Delta_r S^\circ = -137 \text{ J} \cdot \text{K} \cdot \text{mol}^{-1} \\ \Delta_r G^\circ &= 283,8 \times 10^3 - 298 \times (-137) \Rightarrow \Delta_r G^\circ = 342,6 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

On en déduit alors la constante d'équilibre :

$$K^\circ = \exp\left(-\frac{\Delta_r G^\circ}{RT}\right) = \exp\left(-\frac{342,6 \times 10^3}{8,31 \times 298}\right) \Rightarrow \boxed{K^\circ = 1,2 \times 10^{-57}}$$

Q8. On exprime alors la constante d'équilibre à l'aide des pressions partielles (avec une pression totale égale à la pression standard) :

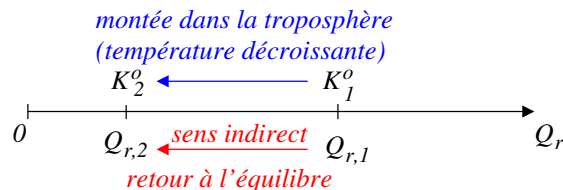
$$K^\circ = \frac{a_{O_3}^2}{a_{O_2}^3} = \frac{p_{O_3}^2 p^\circ}{p_{O_2}^3} = \frac{p_{O_3}^2 p^\circ}{x_{O_2}^3 (p^\circ)^3} \Rightarrow \boxed{p_{O_3} = p^\circ \times x_{O_2}^{3/2} \times \sqrt{K^\circ}}$$

$$p_{O_3} = 10^5 \times (0,20)^{3/2} \times (1,2 \times 10^{-57})^{1/2} \Rightarrow \boxed{p_{O_3} = 3,1 \times 10^{-25} \text{ Pa}}$$

Q9. La figure 1 fait apparaître l'évolution de la température dans l'atmosphère, décroissante dans la troposphère et croissante dans la stratosphère.

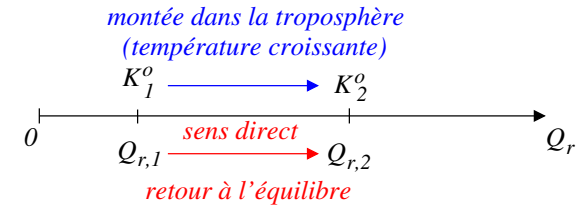
De plus, comme $\Delta_r H^\circ > 0$, la loi de Van't Hoff $\frac{d \ln(K^\circ)}{dT} = \frac{\Delta_r H^\circ}{RT^2}$ assure que la constante d'équilibre est une fonction croissante de la température.

Dans la troposphère : la température diminue avec l'altitude, il en va de même de la constante d'équilibre ; un retour à l'équilibre nécessite donc une diminution du quotient de réaction est une **réaction dans le sens indirect, la formation d'ozone est défavorisée**.



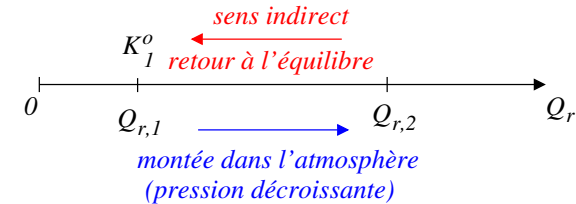
Dans la stratosphère : la température augmente avec l'altitude, il en va de même de

la constante d'équilibre ; un retour à l'équilibre nécessite donc une augmentation du quotient de réaction est une **réaction dans le sens direct, la formation d'ozone est favorisée**.



Le raisonnement précédent a tenu compte du seul paramètre d'équilibre température. Lors de l'élévation dans l'atmosphère, on observe également une baisse de la pression. Le quotient de réaction s'écrit : $Q_r = \frac{n_{O_3}^2 n_{tot}}{n_{O_2}^3} \times \frac{p^\circ}{p_{tot}}$.

Une baisse de la pression entraîne une augmentation du quotient d'équilibre, un retour à l'équilibre est alors marqué par une réaction dans le sens indirect. **Une élévation associée à une baisse de pression favorise la réaction dans le sens indirect**. Cet effet nuance les résultats obtenus avec la seule température.



Q10. L'équilibre I.1 conduisant à la formation de l'ozone nécessite la présence de dioxygène et un rayonnement ultraviolet ; en basse altitude la concentration en dioxygène est maximale mais le rayonnement UV est filtré par l'ozone ; en haute altitude le rayonnement UV est maximal mais la présence de dioxygène quasi-nulle.

On conçoit donc une concentration maximale à une altitude intermédiaire.

Q11. D'après l'équation de réaction I.1, $\boxed{K_R^\circ = \frac{p_{O^\bullet}^2}{p_{O_2} p^\circ}}$.

Q12. D'après la réaction I.2 vérifiant la loi de Van't Hoff :

$$v_{O_3} = k p_{O_2} p_{O^\bullet} \Rightarrow \boxed{v_{O_3} = k \sqrt{K_R^\circ p^\circ} \times p_{O_2}^{3/2}}$$

C'est à dire un ordre $\boxed{3/2}$ par rapport au dioxygène.

4 Champ magnétique créé par une spire

1. Le plan (xOy) est un plan de symétrie de la distribution des courants. En tout point M de ce plan, la champ magnétique est perpendiculaire à ce plan donc $\vec{B}(M) = B_z(r, \theta, z = 0)\vec{u}_z$.

La distribution des courants est invariante par toute rotation d'angle θ , la composante du champ magnétique ne dépend donc pas de θ , en conclusion :

$$\forall M \in (xOy), \vec{B}(M) = B_z(r)\vec{u}_z$$

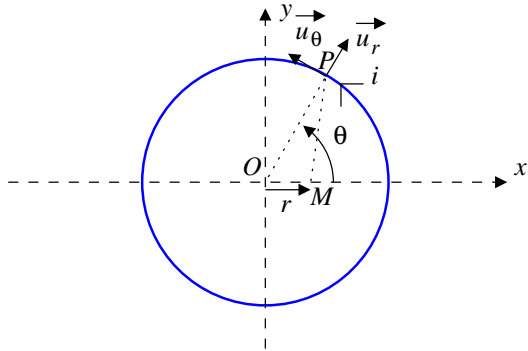
2. On considère dans un premier temps le champ élémentaire créé en O par un élément de spire autour du point P (avec $d\vec{\ell} = R d\theta \vec{u}_\theta$ et $\vec{PO} = -R\vec{u}_r$) :

$$\delta\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 i R d\theta \vec{u}_\theta \wedge -R\vec{u}_r}{4\pi R^3} = \frac{\mu_0 i d\theta}{4\pi R} \vec{u}_z$$

Les équations de Maxwell étant linéaires, le champ résultant est la somme des champs élémentaires, on intègre donc sur l'ensemble de la spire, θ variant de 0 à 2π :

$$\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 i}{2R} \vec{u}_z$$

3. L'invariance par rotation assure que l'on peut choisir de calculer le champ magnétique un point de l'axe Ox sans perte de généralité :



Commençons par déterminer le champ magnétique élémentaire créé en M par un point de la spire situé autour du point P . On note que $d\vec{\ell} = R d\theta \vec{u}_\theta$ et $\vec{PM} = \vec{PO} + \vec{OM} = -R\vec{u}_r + r\vec{u}_x = -R\vec{u}_r + r[\cos(\theta)\vec{u}_r - \sin(\theta)\vec{u}_\theta]$, c'est à dire $\vec{PM} = [-R + r \cos(\theta)]\vec{u}_r - r \sin(\theta)\vec{u}_\theta$. En conséquence :

$$d\vec{\ell} \wedge \vec{PM} = (R - r \cos(\theta)) R d\theta \vec{u}_z$$

et $PM^3 = (PM^2)^{3/2} = [(-R + r \cos(\theta))^2 + (r \sin(\theta))^2]^{3/2}$, c'est à dire :

$$PM^3 = [R^2 + r^2 \cos^2(\theta) - 2Rr \cos(\theta) + r^2 \sin^2(\theta)]^{3/2}$$

On en déduit alors pour le champ élémentaire :

$$\delta\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \times \frac{(R - r \cos(\theta)) R d\theta}{[R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta)]^{3/2}} \vec{u}_z$$

Il reste alors à factoriser par R et intégrer de $\theta = 0$ jusqu'à 2π pour obtenir la formule demandée (avec $u = r/R$) :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 i}{4\pi R} \int_0^{2\pi} \frac{1 - u \cos(\theta)}{(1 - 2u \cos(\theta) + u^2)^{3/2}} d\theta \vec{u}_z$$

4. On développe à l'ordre 2 en u , l'expression dans l'intégrale :

$$\begin{aligned} (1 - 2u \cos(\alpha) + u^2)^{-3/2} &\approx 1 - \frac{3}{2}(-2u \cos(\alpha) + u^2) + \frac{15}{8} \times (-2u \cos(\alpha))^2 \\ &\approx 1 + 3u \cos(\alpha) - \frac{3}{2}u^2 + \frac{15}{2}u^2 \cos^2(\alpha) \end{aligned}$$

Il vient : $\frac{1 - u \cos(\alpha)}{(1 - 2u \cos(\alpha) + u^2)^{3/2}} \approx 1 + 2u \cos(\alpha) + \frac{3u^2}{2}(3 \cos^2(\alpha) - 1)$

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 i}{4\pi R} \int_0^{2\pi} \left[1 + 2u \cos(\alpha) + \frac{3u^2}{2}(3 \cos^2(\alpha) - 1) \right] d\alpha \vec{u}_z$$

Avec $\int_0^{2\pi} \cos(\alpha) d\alpha = 0$, $\int_0^{2\pi} \cos^2(\alpha) d\alpha = \pi$ et $u = r/R$, on obtient :

$$\forall r \ll R, \vec{B}(M) \approx \frac{\mu_0 i}{2R} \left(1 + \frac{3r^2}{4R^2} \right) \vec{u}_z$$