

Devoir surveillé n°04 (correction)

1 Problème 1. Synthèse du méthanol

$$1. \Delta_r H^\circ = -201,5 - (-395,5) \Rightarrow \boxed{\Delta_r H^\circ = 194 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}}$$

2. Il y a 5 paramètres intensifs : pression, température et les trois fractions molaires et ceci pour deux relations : constante d'équilibre et $\sum_i x_i = 1$, c'est à dire une variance $\boxed{v = 3}$.

Pour un mélange stœchiométrique ne comportant initialement que les réactifs, $x_{H_2} = 2x_{CO}$. Du fait de cette relation supplémentaire, **deux paramètres, ici pression et température**, suffisent à fixer l'équilibre.

3. Optimisation de la réaction :

— *hausse de température à pression fixée* : d'après la question 1, la **réaction est endothermique** ; si on augmente la température, le système va tenter de lutter contre cette augmentation en favorisant la réaction dans le sens qui nécessite de l'énergie, ici le sens direct. La **réaction est donc favorisée par une hausse de la température** ;

Raisonnement complet : la loi de Van't Hoff assure que, pour une réaction endothermique, la constante d'équilibre est une fonction croissante de la température. Si la température augmente, la constante d'équilibre augmente ce qui impose un déplacement d'équilibre dans le sens direct pour permettre au quotient de réaction de rejoindre la constante d'équilibre.

— *hausse de pression à température fixée* : le nombre de coefficients gazeux est plus important du côté des réactifs. En cas d'augmentation de pression, le système tentera de lutter contre cette contrainte en diminuant le nombre d'espèces gazeuses présentes, c'est à dire en **favorisant une réaction dans le sens direct**.

Raisonnement complet : le quotient de réaction est une fonction décroissante de la pression (Cf. question suivante). Lors d'une augmentation de la pression, le quotient de réaction décroît, le retour à l'équilibre nécessite une réaction dans le sens direct pour égaliser à nouveau la valeur de la constante d'équilibre.

4. Commençons par dresser un tableau d'avancement de la réaction :

CO _(g)	+	2H _(2g)	=	CH ₃ OH _(g)	$n_{tot,gaz}$
n_0		$2n_0$		0	$3n_0$
$n_0 - \xi_f$		$2(n_0 - \xi_f)$		ξ_f	$3n_0 - 2\xi_f$
$n_0(1 - \rho)$		$2n_0(1 - \rho)$		$n_0\rho$	$n_0(3 - 2\rho)$

On détermine alors le quotient de réaction à l'équilibre égale à la constante d'équilibre :

$$K^\circ = Q_{r,eq} = \frac{a_{CH_3OH}}{a_{CO} \times a_{H_2}^2} = \frac{n_{CH_3OH} \times n_{tot,gaz}^2}{n_{CO} \times n_{H_2}^2} \times \left(\frac{p^\circ}{P}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow K^\circ = \frac{\rho \times (3 - 2\rho)^2}{4 \times (1 - \rho)^3} \left(\frac{p^\circ}{P}\right)^2 \Leftrightarrow \boxed{P = p^\circ \sqrt{\frac{\rho \times (3 - 2\rho)^2}{4 \times (1 - \rho)^3} \times \frac{1}{K^\circ}}}$$

A.N. :

$$P = 1,0 \times \sqrt{\frac{1}{2,5 \times 10^{-3}} \times \frac{0,70 \times (3 - 2 \times 0,70)^2}{4 \times (1 - 0,70)^3}} \Rightarrow \boxed{P = 81 \text{ bar}}$$

On retrouve l'idée qu'un bon rendement nécessite une pression « importante ».

5. Connaissant la pression et le rendement, on détermine le nouveau quotient de réaction à l'équilibre :

$$Q_{r,eq2} = \frac{\rho \times (3 - 2\rho)^2}{4 \times (1 - \rho)^3} \left(\frac{p^\circ}{P}\right)^2 = \frac{0,70 \times (3 - 2 \times 0,70)^2}{4 \times (1 - 0,70)^3} \times \frac{1}{200^2} = 4,1 \times 10^{-4}$$

Ce nouveau quotient de réaction à l'équilibre est la nouvelle constante d'équilibre K_2° . Grâce à la loi de Van't Hoff, il est alors possible de relier la variation de la constante d'équilibre à la variation de température :

$$\frac{d \ln(K^\circ)}{dT} = \frac{\Delta_r H^\circ}{RT^2} \Rightarrow R \ln\left(\frac{K_2^\circ}{K_1^\circ}\right) = \Delta_r H^\circ \left[-\frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_1}\right]$$

$$\boxed{T_2 = \frac{1}{\frac{1}{T_1} - \frac{R}{\Delta_r H^\circ} \ln\left(\frac{K_2^\circ}{K_1^\circ}\right)}}$$

$$\text{A.N. : } T_2 = \frac{1}{\frac{1}{573} - \frac{8,31}{194 \times 10^3} \times \ln(0,41/2,5)} \Rightarrow \boxed{T_2 = 549 \text{ K}}$$

L'augmentation de la pression favorise la réaction dans le sens direct, pour conserver le même rendement, il faut logiquement baisser la température

pour cette réaction endothermique.

6. Les étapes à réaliser :

- connaissant $\Delta_r G^\circ(T)$, on connaît donc $K^\circ(T)$;
- on exprime alors le quotient de réaction $Q_{r,eq}$ soit en fonction du rendement, soit en fonction de la fraction molaire en méthanol avec la pression et le nombre de moles n comme paramètres ;
- la pression étant connue, on résout alors numériquement $Q_{r,eq} = K^\circ(T)$ pour différentes valeurs de n ; on obtient alors $\rho = \rho(n)$ et $x_{CH_3OH} = x(n)$.

7. L'idée est d'**optimiser la fraction molaire en méthanol** et donc de retenir $n = 1,0 \text{ mol}$, ce qui correspond au **mélange stœchiométrique**.

2 Problème 2. Traitement des eaux usées

I . Débitmètre

I . A Débitmètre électromagnétique

1. Symétries du champ.

- (a) Le plan $\Pi = (Oxy)$ est un plan de symétrie de la distribution des courants. En tout point de ce plan, le champ magnétique est normal à ce plan, c'est à dire $\forall M \in \Pi$, $\vec{B}(M) = B_z(x, y, 0)\vec{u}_z$.

En particulier, $\forall P \in (Ox)$, $\vec{B}(P) = B_z(x, 0, 0)\vec{u}_z = B_z(x)\vec{u}_x$.

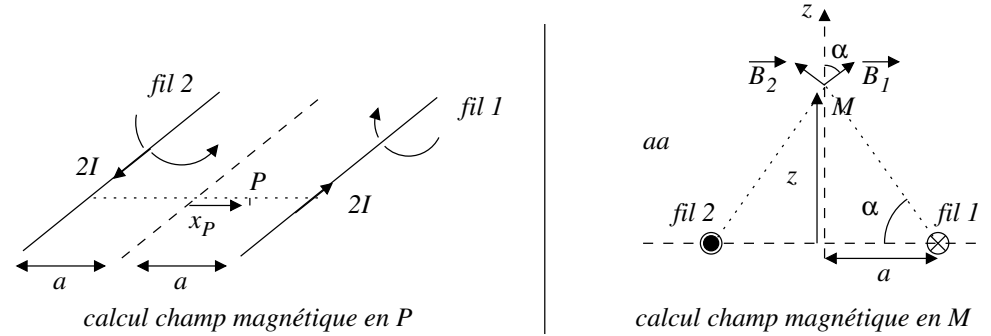
- (b) Les plans $\Pi_1 = (Oxz)$ et $\Pi_2 = (Oyz)$ sont des plans d'antisymétrie de la distribution des courants. En tout point de ces plans, le champ magnétique est contenu dans ces plans, en particulier,

$\forall M \in (Oz) = \Pi_1 \cap \Pi_2$, $\vec{B}(M) = B_z(z)\vec{u}_z$.

2. Expression du champ magnétique.

- (a) (Cf. cours pour la démonstration) : $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$.

- (b) Le champ magnétique est la résultante des deux champs créés par les fils 1 et 2, chacun parcouru par un courant d'intensité $2I$. En un point P de l'axe Ox situé entre les fils, chacun des champs magnétiques est dirigé selon $+\vec{u}_z$:



$$\vec{B}(P) = \frac{2\mu_0 I}{2\pi(a-x_P)}\vec{u}_z + \frac{2\mu_0 I}{2\pi(a+x_P)}\vec{u}_z \Rightarrow \vec{B}(P) = \frac{\mu_0 I}{\pi} \times \frac{2a}{a^2 - x_P^2} \vec{u}_z$$

- (c) En un point M de l'axe Oz , la résultante du champ magnétique étant dirigé selon Oz , il suffit de s'intéresser aux composantes selon Oz de chacun des champs magnétiques.

$$B_{1,z}(M) = \vec{B}_1 \cdot \vec{u}_z = \frac{\mu_0 \times 2I}{2\pi\sqrt{a^2+z^2}} \cos(\alpha) = \frac{\mu_0 I}{\pi\sqrt{a^2+z^2}} \times \frac{a}{\sqrt{a^2+z^2}}$$

Par symétrie $B_{1,z} = B_{2,z}$, et finalement :

$$\vec{B}(M) = \frac{2\mu_0 I a}{\pi(a^2+z^2)} \vec{u}_z$$

- (d) On a $B_z(x) = \frac{\mu_0 I}{\pi} \times \frac{2a}{a^2-x^2}$ et $B_z(O) = \frac{\mu_0 I}{\pi} \times \frac{2a}{a^2}$, on en déduit :

$$\frac{B_z(x) - B_z(O)}{B_z(O)} = \frac{2a/(a^2-x^2) - 2a/a^2}{2a/a^2} \Leftrightarrow \frac{\Delta B(x)}{B(O)} = \frac{x^2}{a^2-x^2}$$

La fonction obtenue est une fonction croissante de x , l'écart relatif maximal est atteint à la limite de la canalisation :

$$\frac{\Delta B}{B(O)} = \frac{R^2}{a^2 - R^2} \Leftrightarrow \frac{\Delta B}{B(O)} = \frac{1}{(a/R)^2 - 1}$$

$\Delta B/B(O) = 1/10$ impose $(a/R)^2 = 11$, c'est à dire $a = R\sqrt{11}$

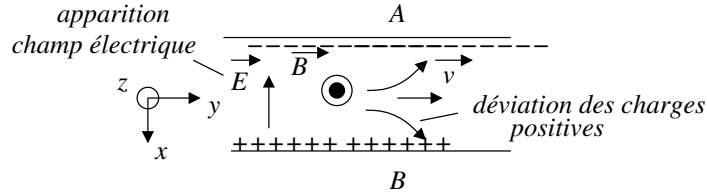
3. Mesure électrique du débit.

- (a) Le débit volumique est égal au flux du vecteur vitesse à travers la section droite de la conduite :

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_{r=0}^R v_0 \left[1 - \frac{r^2}{R^2} \right] r d\theta dr = v_0 \times 2\pi \times \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2} \right]_0^R$$

$$\Leftrightarrow \boxed{Q = \frac{v_0 \pi R^2}{2}}$$

- (b) La présence de la force magnétique de Lorentz dévie les particules chargées, il apparaît des charges sur les plaques A et B , ce qui crée l'équivalent d'un condensateur et l'apparition d'un champ électrique.



- (c) Le déplacement des charges entraîne une augmentation du champ électrique jusqu'à ce que les forces électrique et magnétique sur une particule chargée s'équilibrent, on retrouve alors un écoulement stationnaire selon \vec{u}_y .

$$\vec{0} = q (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\vec{E} = -\vec{v} \wedge \vec{B}}$$

- (d) On intègre alors la relation précédente sur une ligne allant de A à B pour déterminer la différence de potentiel :

$$e_{BA} = V_B - V_A = \int_A^B dV = \int_A^B \overrightarrow{\text{grad}V} \cdot d\vec{l} = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^B (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

$$\Leftrightarrow e_{BA} = \int_A^B (v_y(r) \vec{u}_y \wedge B_0 \vec{u}_z) \cdot dr \vec{u}_x = 2v_0 B_0 \int_0^R \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) dr$$

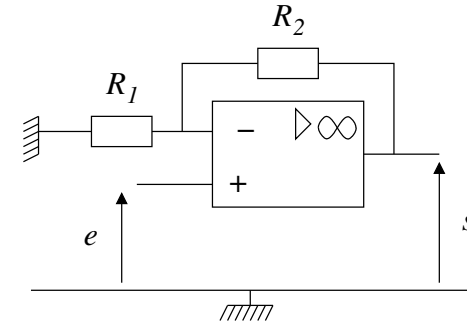
$$\Leftrightarrow e_{BA} = 2v_0 B_0 \left[r - \frac{r^3}{3R^2} \right]_0^R \quad \Rightarrow \quad \boxed{e = e_{BA} = \frac{4v_0 B_0 R}{3}}$$

- (e) Avec $B_0 = B(O) = \frac{2\mu_0 I}{\pi a_{\min}}$ et $v_0 = \frac{2Q}{\pi R^2}$, on en déduit :

$$e = \frac{4v_0 B_0 R}{3} = \frac{4R}{3} \times \frac{2Q}{\pi R^2} \times \frac{2\mu_0 I}{\pi a_{\min}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{e = \frac{16}{3\pi^2} \times \frac{\mu_0 I Q}{R a_{\min}}}$$

$$\text{A.N. : } e = \frac{16}{3\pi^2} \times \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 10 \times 20 \times 10^{-3}}{0,10 \times 0,10 \times \sqrt{11}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{e = 4,1 \mu\text{V}}$$

- (f) Pour obtenir une amplitude de tension de l'ordre du mV, on peut proposer un **montage amplificateur non inverseur** :



D'après la formule du diviseur de tension $v_- = \frac{R_1}{R_1 + R_2} s$. Pour cet ALI idéal en régime linéaire : $v_- = v_+ = e$, en conséquence :

$$s = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) e$$

On peut par exemple retenir $R_1 = 100 \Omega$ et $R_2 = 10 \text{ k}\Omega$ pour un gain de l'ordre de 100.

II . B. Déversoir à seuil mince en canal ouvert

1. Expression du champ des vitesses.

- (a) En amont, le caractère uniforme, stationnaire et unidirectionnel du champ des vitesses permet d'appliquer la loi de l'hydrostatique :

$$\frac{dP}{dz_1} = -\rho g \quad \Rightarrow \quad P(z_1) = -\rho g z_1 + \text{cste} \quad \text{avec} \quad P(h) = P_0$$

En conséquence : $\boxed{P(z_1) = P_0 + \rho g(h - z_1)}$.

- (b) Pour cet écoulement stationnaire, parfait et incompressible, on applique la relation de Bernoulli le long d'une ligne de courant allant de M_1 à M_2 :

$$P(z_1) + \rho g z_1 + \rho \frac{v_1^2}{2} = P_2 + \rho g z_2 + \rho \frac{v_2^2(z)}{2}$$

Avec $P_2 = P_0$, $v_1 \ll v_2$, on en déduit :

$$v_2^2(z) = 2g(h - z_2) = 2g(h - H - z) \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_2(z) = \sqrt{2g(h - H - z)}}$$

2. C'est à dire pour le débit volumique :

$$Q = \int_{y=0}^B \int_{z=0}^{h-H} \sqrt{2g(h - H - z)} dy dz = B \times \sqrt{2g} \times \left(-\frac{2}{3}\right) \times \left[(h - H - z)^{3/2}\right]_0^{h-H}$$

$$\Leftrightarrow Q = \frac{2B}{3} \times \sqrt{2g} \times (h - H)^{3/2}$$

3. Pour un aller retour : $2\Delta h = 2(h_s - h) = c\Delta t$, donc : $h = h_s - \frac{c\Delta t}{2}$.

La vitesse du son dans l'air dépend de la température, ce qui affecte la mesure de h . On peut envisager que la présence de mousse perturbe la réflexion du signal vers la sonde (diffusion, diffraction, ...).

II . C. Jaugeur Venturi en canal ouvert

1. Préliminaire : écoulement fluvial ou torrentiel.

(a) On applique la relation de Bernoulli pour une ligne de courant au niveau de la surface libre :

$$P_0 + \frac{\rho v^2(x)}{2} + \rho gh(x) = cste \Rightarrow H(x) = h(x) + \frac{v^2(x)}{2g} = cste$$

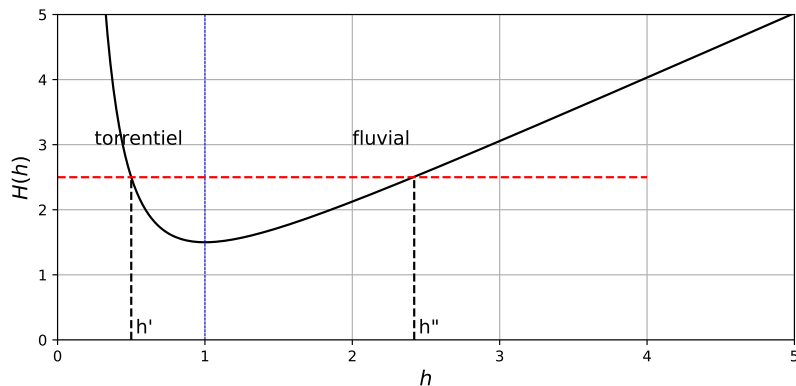
(b) Avec $Q = Bh(x)v(x)$, on en déduit :

$$H(h) = h + \frac{Q^2}{2gB^2} \times \frac{1}{h^2}$$

On a : $\lim_{h \rightarrow +\infty} H(h) = +\infty$ et $\lim_{h \rightarrow 0} H(h) = +\infty$.

De plus : $H'(h) = 1 - \frac{Q^2}{gB^2} \times \frac{1}{h^3}$ et $H'(h_c) = 0 \Leftrightarrow h_c = \left(\frac{Q^2}{gB^2}\right)^{1/3}$.

On peut alors réécrire $H(h) = h + \frac{h_c^3}{2h^2}$. Ce qui donne pour le tracé de la courbe avec $h_c = 1$ en unité arbitraire.



Pour une valeur de H donnée, on obtient bien en général deux solutions h' et h'' .

(c) D'après le calcul précédent de la dérivée, à débit fixé, la charge est minimale pour $h_c = \left(\frac{Q^2}{gB^2}\right)^{1/3}$ et la vitesse vaut alors :

$$v_c = \frac{Q}{Bh_c} = \frac{Q}{B} \times \left(\frac{gB^2}{Q^2}\right)^{1/3} \Rightarrow v_c = \left(\frac{gQ}{B}\right)^{1/3}$$

Et pour la charge spécifique minimale :

$$H_c = h_c + \frac{h_c^3}{2h_c^2} \Rightarrow H_c = \frac{3h_c}{2}$$

(d) On exprime le débit en fonction de h avec H comme paramètre :

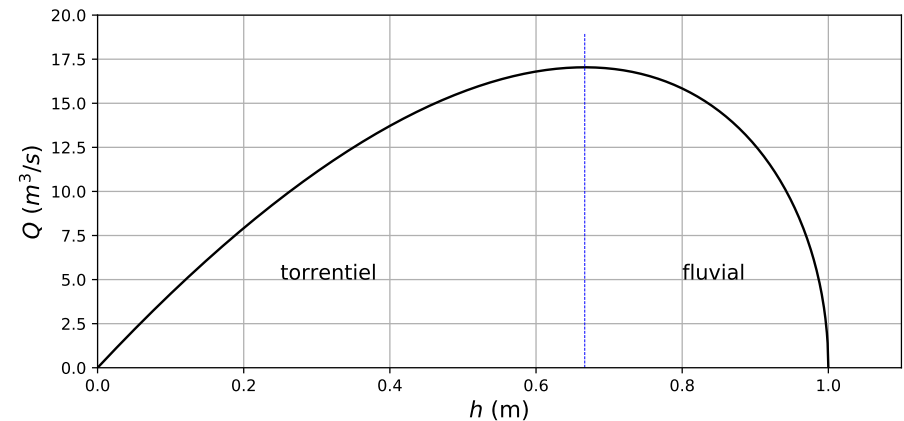
$$H = h + \frac{Q^2}{2gB^2h^2} \Leftrightarrow Q = Bh\sqrt{2g(H-h)}$$

Remarque : par définition de H , $H > h$ et le débit est bien défini.

Le débit s'annule en $h = 0$ et $h = H$ et par calcul de la dérivée :

$$Q'(h) = B \left[\sqrt{2g(H-h)} - \frac{hg}{\sqrt{2g(H-h)}} \right]$$

C'est à dire : $Q'(h) = 0 \Leftrightarrow h = \frac{2H}{3}$. La courbe est tracée pour $B = 10$ m et $H = 1,0$ m.



2. Jaugeur Venturi.

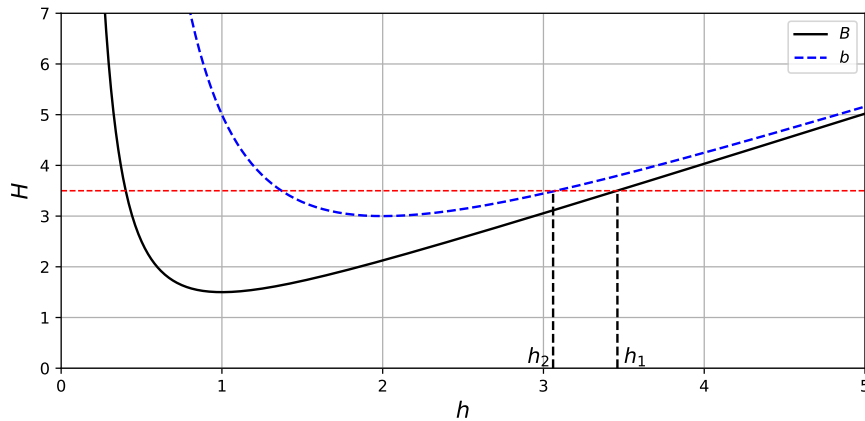
- (a) Le canal d'approche permet d'obtenir un **écoulement uniforme**.
 (b) Par conservation du débit volumique pour cet écoulement homogène, incompressible et unidimensionnel :

$$Q = v_1 h_1 B = v_2(x) h_2(x) b$$

- (c) Les charges spécifiques dans les deux zones sont respectivement :

$$H_B(h) = h + \frac{h_{c,B}^3}{2h^2} \quad \text{et} \quad H_b(h) = h + \frac{h_{c,b}^3}{2h^2}$$

Avec $B > b$, on a $h_{B,c} = \left(\frac{Q^2}{gB^2}\right)^{1/3} < h_{b,c} = \left(\frac{Q^2}{gb^2}\right)^{1/3}$ et donc $\forall h, H_B(h) < H_b(h)$. Les courbes ci-après sont alors tracées avec, pour fixer les idées, $h_{B,c} = 1,0$ m et $h_{b,c} = 2,0$ m.



Le régime restant fluvial, et la charge spécifique étant fixée, avec $b < B$, on a nécessairement $h_2 < h_1$. De plus avec la conservation du débit volumique, $h_2 b < B h_1$ entraîne $v_2 > v_1$.

Il reste alors à combiner la conservation du débit volumique et de la charge spécifique avec $v_1 \ll v_2$:

$$v_1 h_1 B = v_2 h_2 b \quad \text{et} \quad h_1 + \frac{v_1^2}{2g} = h_2 + \frac{v_2^2}{2g}$$

On en déduit $v_2 = \sqrt{2g(h_1 - h_2)}$ et finalement pour le débit :

$$Q = h_2 b \sqrt{2g(h_1 - h_2)}$$

- (d) Avec $v_1 \ll \sqrt{2gh_1}$, $H \simeq h_1$. La charge spécifique se conservant, elle est égale à la charge spécifique pour le régime critique :

$$h_1 \simeq H = H_c = \frac{3h_c}{2} = \frac{3}{2} \times \left(\frac{Q^2}{gb^2}\right)^{1/3}$$

$$\Leftrightarrow Q^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times b^2 g \times h_1^3 \quad \Rightarrow \quad Q = \left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} \times b \sqrt{g} \times h_1^{3/2}$$

Avec $(2/3)^{3/2} \simeq 0,544$, en conformité avec l'énoncé.

Ce qui donne pour la valeur de b :

$$b = \frac{1000/3600}{0,544 \times \sqrt{9,81} \times (0,50)^{3/2}} \quad \Rightarrow \quad b = 0,46 \text{ m}$$

Pour des valeurs de b plus modestes, les **effets de viscosité** sont sans doute à prendre en compte avec une non conservation de la charge spécifique.

- (e) Dans le cas du jaugeur dénoyé $Q \propto h_1^{3/2}$, la détermination du débit ne dépend que d'une mesure en amont. Dans le cas du jaugeur noyé $Q \propto h_2 \sqrt{h_1 - h_2}$, le débit dépend de deux mesures, dont la différence des deux hauteurs qui peut s'avérer plus imprécise.

II. Dessablage - Déshuilage

A. Vitesse limite

1. La particule est soumise à trois forces :

— force de viscosité : $\vec{F}_t = -6\pi\eta r \vec{v}$;

— poids : $\vec{P} = -\rho_s \times \frac{4}{3}\pi r^3 g \vec{u}_z$;

— poussée d'Archimède : $\vec{\Pi} = \rho_e \times \frac{4}{3}\pi r^3 g \vec{u}_z$.

2. Pour une chute inertielle, les forces se compensent, on en déduit :

$$\vec{v}_l = \frac{2r^2}{9\eta} \times g(\rho_e - \rho_s) \vec{u}_z \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_l = \frac{2}{9} \times \frac{r^2 g}{\nu} (1 - d) \vec{u}_z$$

La sédimentation nécessite $d > 1$.

B. Durée de sédimentation

Connaissant la vitesse limite v_l , on en déduit $t_c = H/v_l$.

	sable grossier	sable fin	limon	argile	colloïde
r (m)	$1,0 \times 10^{-3}$	$1,0 \times 10^{-4}$	$1,0 \times 10^{-5}$	$1,0 \times 10^{-6}$	$1,0 \times 10^{-7}$
v_l (m · s ⁻¹)	3,6	$3,6 \times 10^{-2}$	$3,6 \times 10^{-4}$	$3,6 \times 10^{-6}$	$3,6 \times 10^{-8}$
t_c (s)	0,56	56	$5,6 \times 10^3$	$5,6 \times 10^5$	$5,6 \times 10^7$
t_c (h)	$1,5 \times 10^{-4}$	$1,5 \times 10^{-2}$	1,5	$1,5 \times 10^2$	$1,5 \times 10^4$
R_e	$7,2 \times 10^3$	7,2	$7,2 \times 10^{-3}$	$7,2 \times 10^{-6}$	$7,2 \times 10^{-9}$

C. Nombre de Reynolds

Dans le cas présent :
$$R_e = \frac{\rho_e v_l \times 2r}{\eta} = \frac{v_l \times 2r}{\nu}$$
.

Cf. résultats dans le tableau ci-dessus.

Le modèle proposé ne s'applique pas pour le sable grossier et est « un peu limite » pour le sable fin.

D. Temps de chute

La durée de chute est une fonction décroissante du rayon de la particule, en conséquence :

$$t_c(r_{min}) = t_{max} = \frac{9\nu H}{2r_{min}^2 g(d-1)} \Leftrightarrow r_{min} = \sqrt{\frac{9\nu H}{2t_{max} g(d-1)}}$$

$$\text{A.N. : } r_{min} = \sqrt{\frac{9 \times 10^{-6} \times 2,0}{2 \times 2,0 \times 3600 \times 9,81 \times (2,65 - 1)}} \Rightarrow \boxed{r_{min} = 8,8 \mu\text{m}}$$

E. Dimensionnement du dessableur

1. Le mouvement des particules solides est un **mouvement inertiel**, la trajectoire est donc une **ligne droite**, le vecteur vitesse étant obtenu par somme vectorielle du vecteur vitesse d'entraînement et du vecteur vitesse de chute.

Avec une composante de vitesse $v_{eau} = \frac{Q}{H \times L/6}$ selon l'axe Ox , la particule parcourt la distance L en :

$$\Delta t = \frac{L}{v_{eau}} \Rightarrow \boxed{\Delta t = \frac{HL^2}{6Q}}$$

2. La durée de traversée du bac doit être supérieure au temps de sédimentation :

$$\Delta t \geq t_c(r_{min}) \Leftrightarrow \boxed{L \geq \sqrt{\frac{6Qt_c(r_{min})}{H}}}$$

$$\text{A.N. : } L_{min} = \sqrt{\frac{6 \times 20 \times 10^{-3} \times 2,0 \times 3600}{2,0}} \Rightarrow \boxed{L_{min} = 21 \text{ m}}$$