

Devoir surveillé n°03 (correction)

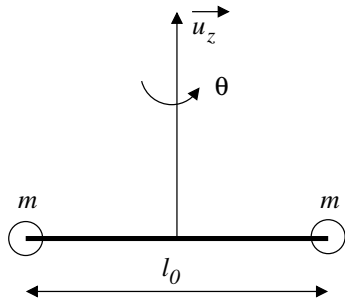
1 Résolution de problème (oral Centrale 2017)

Stratégie de résolution :

- dans un premier temps, on s'intéressera à la seule balance de torsion constituée du fléau, du fil de torsion, de la tige et des petites masses. En obtenant une équation d'oscillateur harmonique pour les oscillations libres de ce système, on pourra relier la constante de rappel à la période propre ;
- dans un second temps, le couple de rappel étant alors connu, on pourra, en égalisant ce couple de rappel et le couple gravitationnel, déterminer l'expression de la constante de gravitation.

Oscillations libres, mise en équation :

On considère comme système la seule balance de torsion :



On note $l_0 = 2,0$ m la longueur de la barre, m les petites masses et C la constante de rappel associée au couple de torsion. En l'absence des grosses masses et en négligeant les frottements, le seul moment à considérer est celui du couple de torsion. Le moment d'inertie J se calcule en négligeant l'inertie de la tige et en considérant que l'on a deux masses m situées à une distance $l_0/2$ de l'axe de rotation. En projection sur l'axe Oz , le théorème du moment cinétique conduit à :

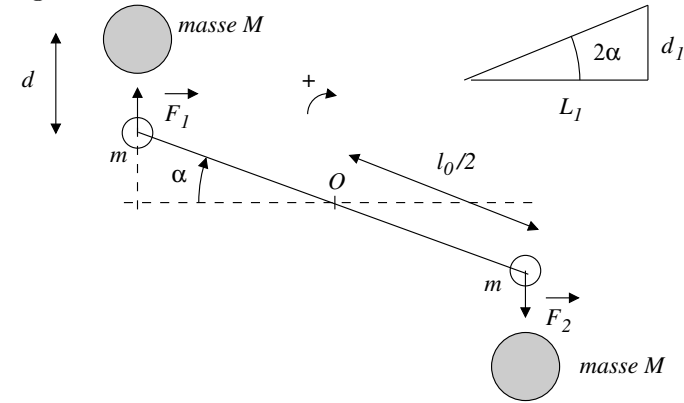
$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = 2 \times m \left(\frac{l_0}{2} \right)^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -C\theta \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{2C}{ml_0^2} \theta = 0$$

Cette équation est celle d'un oscillateur harmonique, on peut donc identifier la pulsation propre et ainsi la période propre :

$$\omega_0^2 = \frac{4\pi^2}{T_0^2} = \frac{2C}{ml_0^2} \Leftrightarrow C = \frac{2\pi^2 ml_0^2}{T_0^2}$$

Équilibre des moments de force, mise en équation :

En présence des grosses masses, sous l'effet de l'attraction gravitationnelle le fléau tourne d'un angle α :



Par utilisation de la formule du bras de levier, le couple gravitationnel a pour expression :

$$\Gamma_g = 2 \times l_0/2 \times \cos(\alpha) \times \frac{GMm}{d^2} \Rightarrow \Gamma_g \simeq \frac{GMml_0}{d^2}$$

Comme $\alpha \ll 1$ rad (Cf. projection sur l'écran), on s'est limité à une formule à l'ordre 1 en α . Plus précisément avec un déplacement $d_1 = 2,42$ mm pour une distance de $L_1 = 2,5$ m :

$$2\alpha \simeq \frac{d_1}{L_1} \quad (\alpha = 4,8 \times 10^{-4} \text{ rad})$$

Il reste alors à égaliser les normes des deux couples :

$$C\alpha = \frac{Cd_1}{2L_1} = \frac{GMml_0}{d^2} \Leftrightarrow G = \frac{Cd_1}{2L_1} \times \frac{d^2}{Mml_0}$$

En utilisant l'expression de C précédemment obtenue, on en déduit :

$$G = \frac{2\pi^2 ml_0^2}{T_0^2} \times \frac{d_1}{2L_1} \times \frac{d^2}{Mml_0} \Leftrightarrow G = \frac{\pi^2 l_0}{T_0^2} \times \frac{d_1}{L_1} \times \frac{d^2}{M}$$

Application numérique et analyse du résultat :

$$G = \frac{\pi^2 \times 2,0}{271,5^2} \times \frac{2,42 \times 10^{-3}}{2,5} \times \frac{0,200^2}{158} \Rightarrow G = 6,6 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$$

Cette expérience historique donne une valeur très satisfaisante de la constante de gravitationnelle universelle $G = 6,67408 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$.

2 Régulateur de température (extrait CS, TSI, 2018)

2.1 Étude du capteur de température

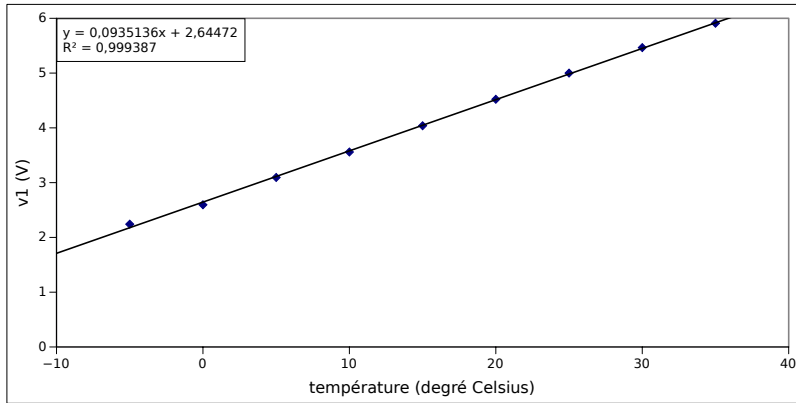
1. Le courant prélevé par la borne négative de l'ALI étant nul, on peut appliquer la formule du pont diviseur de tension :

$$v_1(T) = \frac{R_0}{R_0 + R(T)} V_0$$

2. Complétons le tableau avec les valeurs de v_1 pour les différentes températures :

T (°C)	-5	0	5	10	15	20	25	30	35
$R(T)$ (Ω)	1142	914,3	736,4	597,2	487,1	399,8	330	273,8	228,4
$v_1(T)$ (V)	2,24	2,596	3,09	3,56	4,04	4,52	5	5,47	5,91

On trace alors la tension v_1 en fonction de la température T et on teste la possibilité d'une relation affine entre ces deux grandeurs :



Le coefficient de régression et l'alignement des points sur une droite permettent de valider le modèle avec : $a = 2,64$ V et $b = 93,5 \times 10^{-3}$ V/°C.

2.2 Étude du bloc 2

1. On est en présence d'un **comparateur à hystérésis**.
2. L'**absence de rétroaction sur l'entrée inverseuse** implique un fonctionnement en saturation.

On applique, en terme de potentiel, la loi des nœuds à l'entrée non inverseuse de l'ALI :

$$\frac{E - v_+}{R_1} = \frac{v_+ - v_s}{R_2} \Leftrightarrow v_+ = \frac{R_2 E + R_1 v_s}{R_1 + R_2}$$

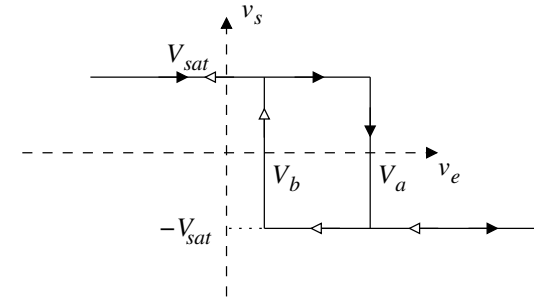
Premier cas : $v_s = +V_{sat}$ à condition que $v_+ > v_- = v_e$, c'est à dire :

$$v_e < \frac{R_2 E + R_1 V_{sat}}{R_1 + R_2} = V_a$$

Second cas : $v_s = -V_{sat}$ à condition que $v_+ < v_- = v_e$, c'est à dire :

$$v_e > \frac{R_2 E - R_1 V_{sat}}{R_1 + R_2} = V_b$$

Comme $V_a > V_b$, partant d'une situation pour laquelle $v_e > V_a$ et $v_s = -V_{sat}$, la tension de sortie reste sur un niveau bas tant que $v_e > V_b$ et bascule alors à $+V_{sat}$, elle reste à cette valeur tant que v_e ne dépasse pas V_a , ce qui donne pour le cycle d'hystérésis (en supposant $V_b > 0$) :



2.3 Étude du dispositif complet

1. Les tensions de basculement V_a et V_b précédemment déterminées doivent être associées aux températures $T_c - \Delta T$ et $T_c + \Delta T$; comme $v_e = v_1$, cela impose :

$$a + b(T_c + \Delta T) = \frac{R_2 E + R_1 V_{sat}}{R_1 + R_2} \quad \text{et} \quad a + b(T_c - \Delta T) = \frac{R_2 E - R_1 V_{sat}}{R_1 + R_2}$$

L'énoncé demandant une réponse ne dépendant pas de T_c , l'idée est de soustraire les deux égalités :

$$2b\Delta T = \frac{R_2 E + R_1 V_{sat}}{R_1 + R_2} - \frac{R_2 E - R_1 V_{sat}}{R_1 + R_2} = \frac{2R_1 V_{sat}}{R_1 + R_2}$$

$$R_2 = R_1 \times \left(\frac{V_{sat}}{b\Delta T} - 1 \right)$$

2. Après avoir soustrait les équations, il semble assez naturel de les additionner ce qui conduit à :

$$2a + 2bT_c = \frac{2R_2 E}{R_1 + R_2} = \frac{2R_2}{R_1 + R_2} \times (\alpha_0 + \alpha T_c)$$

$$\Leftrightarrow a + bT_c = \frac{R_1 \left(\frac{V_{sat}}{b\Delta T} - 1 \right)}{R_1 + R_1 \left(\frac{V_{sat}}{b\Delta T} - 1 \right)} \times (\alpha_0 + \alpha T_c)$$

$$\Leftrightarrow \forall T_c \in [5^\circ\text{C}, 30^\circ\text{C}], \quad a + b \times T_c = \frac{V_{sat} - b\Delta T}{V_{sat}} (\alpha_0 + \alpha \times T_c)$$

Cette équation devant rester vraie pour toutes les valeurs de T_c variant entre 5°C et 30°C , cela impose l'égalité des termes constants et des termes en facteur de la température T_c :

$$a = \frac{V_{sat} - b\Delta T}{V_{sat}} \times \alpha_0 \quad \text{et} \quad b = \frac{V_{sat} - b\Delta T}{V_{sat}} \times \alpha$$

On en déduit :

$$\boxed{\alpha_0 = \frac{aV_{sat}}{V_{sat} - b\Delta T}} \quad \text{et} \quad \boxed{\alpha = \frac{bV_{sat}}{V_{sat} - b\Delta T}}$$

3. Application numérique :

$$R_2 = 100 \times \left(\frac{15}{93,5 \times 10^{-3} \times 0,20} - 1 \right) \Rightarrow \boxed{R_2 = 8,0 \times 10^4 \Omega}$$

$$\alpha_0 = \frac{2,64 \times 15}{15 - 93,5 \times 10^{-3} \times 0,20} \Rightarrow \boxed{\alpha_0 = 2,64 \text{ V}}$$

$$\alpha = \frac{93,5 \times 10^{-3} \times 15}{15 - 93,5 \times 10^{-3} \times 0,20} \Rightarrow \boxed{\alpha = 93,6 \times 10^{-3} \text{ V}/^\circ\text{C}}$$

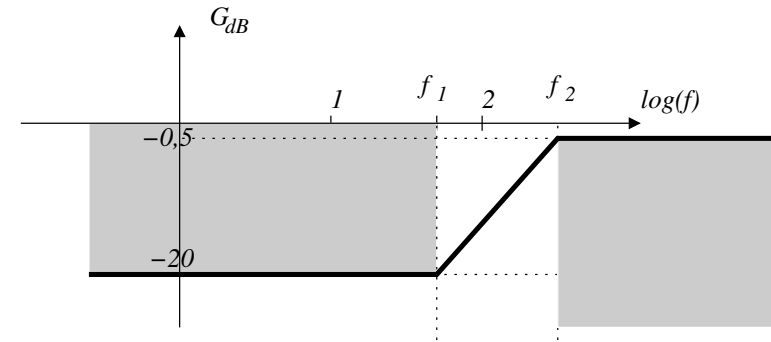
3 Filtre passe-haut (Oral Centrale 2017)

1. Sur le graphique ci-après les zones interdites sont représentées grisées.

Le cahier des charges proposé impose une pente supérieure à $+20 \text{ dB/dec}$, en effet :

$$p = \frac{G_{dB,2} - G_{dB,1}}{\log(f_2) - \log(f_1)} = \frac{19,5}{2,48 - 1,69} \Rightarrow \boxed{p = +25 \text{ dB/dec}}$$

Cette pente ne peut être obtenue avec un filtre 1er ordre (pente de 20 dB/dec).



2. On applique la formule du diviseur de tension pour déterminer la fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{jL\omega}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{-LC\omega^2}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$$

Ce qui impose : $x^2 = LC\omega^2$ et $\frac{x}{Q} = RC\omega$, c'est à dire :

$$\boxed{\omega_0^2 = \frac{1}{LC}} \quad \text{et} \quad \boxed{Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}}$$

3. On impose $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$, le module de la fonction de transfert prend la forme simplifiée :

$$|\underline{H}|(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1 + x^4 - 2x^2 + 2x^2}} = \frac{x^2}{\sqrt{1 + x^4}} \Leftrightarrow |\underline{H}|(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + 1/x^4}}$$

Et donc pour le gain en décibels :

$$G_{dB}(x) = -10 \log \left(1 + \frac{1}{x^4} \right)$$

Le gabarit du filtre impose :

— *coupure à basse fréquence* :

$$G_{dB}(x_1) = -20 = -10 \log \left(1 + \frac{1}{x_1^4} \right) \Rightarrow 2 = \log \left(1 + \frac{1}{x_1^4} \right)$$

Par lecture graphique, on peut retenir $x_1 = 0,30$ qui remplit le critère de coupure.

— *préservation du signal à haute fréquence* :

$$G_{dB}(x_2) = -0,5 = -10 \log \left(1 + \frac{1}{x_2^4} \right) \Rightarrow 5 \times 10^{-2} = \log \left(1 + \frac{1}{x_2^4} \right)$$

L'énoncé impose $f_2/f_1 = x_2/x_1 = 6$, c'est à dire $x_2 = 1,8$. Graphique-

ment $G_{dB}(x_2)$ semble inférieur à 0,05. Par le calcul $G_{dB}(1,8) = 3 \times 10^{-2}$.

Le critère est respecté.

Enfin connaissant la valeur de x_1 , on peut en déduire ω_0 :

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = x_1 \Rightarrow \omega_0 = \frac{\omega_1}{x_1} = \frac{2\pi f_1}{x_1}$$

$$\text{A.N. : } \omega_0 = \frac{2\pi \times 50}{0,30} = 1,05 \times 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \Rightarrow \boxed{\omega_0 \simeq 1,1 \times 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}$$

On peut alors déterminer la valeur de l'inductance :

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC_0} \Leftrightarrow L = \frac{1}{\omega_0^2 C_0}$$

$$\text{A.N. : } L = \frac{1}{(1,05 \times 10^3)^2 \times 10^{-6}} \Rightarrow \boxed{L \simeq 0,9 \text{ H}}$$

Cette valeur importante nécessite la présence d'un noyau de fer doux. De plus une telle bobine possède un aspect résistif et **il n'est sans doute pas très réaliste de la représenter par une bobine idéale.**

4 Biothermie des animaux (adapté Centrale PSI 2009)

4.1 Préambule

1. Loi de Fourier : $\vec{j}_Q = -\lambda \times \overrightarrow{\text{grad}}(T)$ avec :

- \vec{j}_Q , le vecteur densité volumique de courant thermique en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$;
- λ , la conductivité thermique en $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$;
- T la température en kelvin.

La loi de Fourier stipule qu'en présence d'une inhomogénéité de température au sein d'un matériau, un courant thermique apparaît dans la direction du gradient de température et proportionnellement à celui-ci. Le signe « - » assure que le flux thermique s'effectue du chaud vers le froid, la conductivité thermique prenant en compte le caractère plus ou moins conducteur du matériau.

$$2. \boxed{\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + p} \text{ (Cf. cours).}$$

4.2 Lois d'échelle

1. Appelons d_{O_2} le volume de dioxygène transporté par le sang à chaque battement de cœur ; cette grandeur étant à peu près proportionnelle à la masse

corporelle, on peut écrire :

$$d_{O_2} = k \times M_c$$

Cette grandeur est liée au débit Q_{O_2} de l'énoncé selon :

$Q_{O_2} = d_{O_2} \times \text{nb de battements par heure}$

$$Q_{O_2} = d_{O_2} \times 60 \times \text{nb de battements par minute} = 60 \times d_{O_2} \times f_c$$

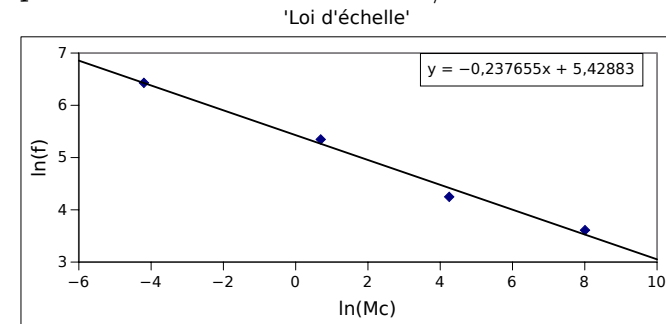
Comme $Q_{O_2} = 0,68 \times M_c^{3/4}$, on en déduit :

$$f_c = \frac{Q_{O_2}}{3600 \times d_{O_2}} = \frac{0,68 \times M_c^{3/4}}{60 \times k \times M_c} = \beta M_c^{-1/4}$$

On détermine β en considérant qu'un homme de 70 kg effectue 70 battements par minute, ce qui impose :

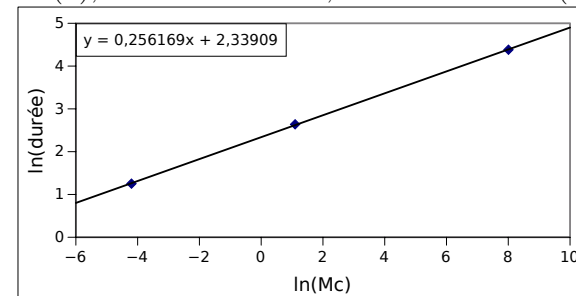
$$70 = \beta (70)^{-1/4} \text{ donc } \boxed{f_c = 70 \times \left(\frac{M_c}{70}\right)^{-1/4}}$$

2. Il s'agit de tracer $\ln(f_c)$ en fonction de $\ln(M_c)$ en incluant le cas de l'homme, de la souris, du lapin et de l'éléphant. Sur la figure ci-après, **les points s'alignent de façon satisfaisante sur une droite et la pente de $-0,23$ est compatible avec le coefficient $-1/4$.**



3. Durée de vie :

(a) On trace $\ln(\tau)$, la durée de la vie, en fonction de $\ln(M_c)$:



L'exposant de la loi d'échelle vaut donc $1/4$, $\tau_{vie} = k \times M_c^{1/4}$

(b) La comparaison des deux lois précédentes conduit à :

$$f_c \times \tau_{vie} = cste = \text{nb de battements dans une vie}$$

Cela signifie, qu'en première approximation, le nombre de battements dans une vie est fixé, les petits mammifères ont des pulsations très élevées pour une durée de vie courte, inversement pour les gros mammifères.

(c) L'homme vit aussi longtemps que l'éléphant, il est pourtant bien plus léger. L'amélioration des conditions de vie, la médecine, l'alimentation, ... font que **l'homme ne vérifie pas cette loi**.

4. Commençons par ramener le débit de l'énoncé en litre par seconde :

$$q_{O_2} = \frac{Q_{O_2}}{3600} = \frac{0,68}{3600} \times M_c^{3/4}$$

En multipliant le débit en litre/seconde par l'énergie libérée en J/litre, on obtient la puissance en watt :

$$P = \frac{0,68}{3600} M_c^{3/4} \times 20 \times 10^3 \Rightarrow P = 3,8 \times M_c^{3/4}$$

Pour un homme avec $M_c = 70 \text{ kg}$, $P \simeq 90 \text{ W}$.

Pour un homme, produire une puissance mécanique de 100 W représente un effort significatif, **l'homme consomme donc une grande partie de ses réserves d'énergie à maintenir sa température corporelle**.

5. Masse du plus petit mammifère :

(a) En régime stationnaire et en l'absence de sources en volume dans la fourrure, le flux thermique à travers une sphère centrée sur l'origine est indépendant de r ce qui s'écrit :

$$\forall r \in]R_a, R_a + e[, \Phi(r) = \Phi_0$$

Compte tenu de la loi de Fourier pour ce problème à symétrie sphérique :

$$\forall r \in]R_a, R_a + e[, \Phi_0 = -\lambda \frac{dT}{dr} \times 4\pi r^2 \Leftrightarrow dT = -\frac{\Phi_0}{\lambda} \times \frac{dr}{4\pi r^2}$$

On intègre alors la relation précédente aux limites de la fourrure :

$$\int_{T_i}^{T_e} dT = -\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda} \int_{r=R_a}^{R_a+e} \frac{dr}{r^2} \Rightarrow T_i - T_e = \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda} \frac{e}{R_a(R_a + e)}$$

C'est à dire pour la résistance thermique :

$$R_{th} = \frac{T_i - T_e}{\Phi_0} \Rightarrow R_{th} = \frac{e}{4\pi\lambda R_a(R_a + e)}$$

La puissance émise n'est autre que le flux Φ_0 de la démonstration :

$$P = \frac{T_i - T_e}{R_{th}} \Rightarrow P = \frac{4\pi\lambda}{e} R_a(R_a + e)(T_i - T_e)$$

(b) On sait que $P = 3,8 \times M_c^{3/4} = 3,8 \times (\mu \times \frac{4\pi}{3})^{3/4} \times R_a^{9/4}$. On identifie les deux expressions donnant la puissance :

$$3,8 \times (\mu \times \frac{4\pi}{3})^{3/4} \times R_a^{9/4} = \frac{4\pi\lambda}{e} R_a(R_a + e)(T_i - T_e)$$

$$\text{On en déduit } \frac{R_a}{e} = \frac{3,8 \times (\mu \times 4\pi/3)^{3/4} R_a^{5/4}}{4\pi\lambda(T_i - T_e)} - 1$$

On constate que R_a/e est une fonction croissante de R_a , e/R_a est donc une fonction décroissante de R_a . Pour maintenir sa température corporelle, **un petit animal a besoin relativement d'une plus grosse protection**.

(c) À la limite où $R_a = e$, on en déduit :

$$8\pi\lambda\Delta T = 3,8 \times (\mu \times 4\pi/3)^{3/4} R_a^{5/4}$$

On en déduit $R_a \simeq 7,4 \text{ mm}$, c'est à dire $M_c = \mu \frac{4\pi}{3} R_a^3 \simeq 1,6 \text{ g}$, en accord avec la masse proposée dans l'énoncé.

4.3 La chouette harfang

Démarche :

- connaissant la masse de la chouette M et en assimilant sa masse volumique μ à celle de l'eau, on pourra en déduire le rayon R_a de la chouette assimilée à une sphère ;
- on déterminera alors la puissance thermique dissipée par la chouette d'après la relation (1) ;
- cette puissance thermique doit être composée par l'énergie brûlée par la réaction chimique ; en estimant l'enthalpie de réaction de l'oxydation du glucose, on pourra en déduire la consommation de dioxygène, d'abord en mol/s puis en L/s en utilisant la formule des gaz parfaits.

Calculs :

- Rayon équivalent de la chouette :

$$M = \mu \times \frac{4\pi}{3} R_a^3 \Rightarrow R_a = \left(\frac{3M}{4\pi\mu} \right)^{1/3}$$

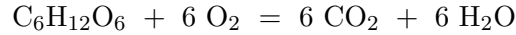
$$\text{A.N. : } R_a = \left(\frac{3 \times 2,0}{4\pi \times 1000} \right)^{1/3} \Rightarrow \boxed{R_a \simeq 8,0 \text{ cm}}.$$

— Flux thermique :

$$P = \frac{4\pi\lambda}{e} R_a (R_a + e) (T_i - T_e) = \frac{4\pi \times 0,05}{1,0 \times 10^{-2}} \times 8,0 \times 9,0 \times 10^{-4} \times 41$$

$$\boxed{P \simeq 19 \text{ W}}.$$

— Réaction chimique :



$$\Delta_r H^\circ = 6 \times (-393,52) + 6 \times (-285,10) + 1273,3 = -2,8 \times 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}.$$

En une durée dt , l'énergie thermique perdue vaut Pdt , elle doit être compensée par un avancement $d\xi$ de la réaction correspondant à un apport $d\xi \times |\Delta_r H^\circ|$:

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{P}{|\Delta_r H^\circ|}$$

— Consommation de dioxygène :

D'après les coefficients de la réaction, la consommation de dioxygène est 6 fois supérieure à l'avancement ; il s'agit enfin d'utiliser la valeur du volume molaire d'un gaz parfait ($V_m \simeq 22 \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1}$ à cette température à retrouver si nécessaire avec l'équation des gaz parfaits) pour en déduire la consommation Q_{O_2} en litre par seconde :

$$Q_{\text{O}_2} = 6 \times V_m \times \frac{P}{|\Delta_r H^\circ|} = 6 \times 22 \times \frac{19}{2,8 \times 10^6} \simeq 1 \text{ mL} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\text{C'est à dire } \boxed{Q_{\text{O}_2} = 3,6 \text{ L} \cdot \text{h}^{-1}}.$$

— Analyse :

En utilisant la loi d'échelle proposée en début d'énoncé, on trouve : $Q_{\text{O}_2} = 0,68 \times (2,0)^{3/4} \simeq 1 \text{ L} \cdot \text{h}^{-1}$. La valeur trouvée est cohérente en ordre de grandeur. Notons que notre modèle place la chouette dans un environnement froid de 0°C qui n'est pas celui de l'expérience de Kleiber et qui entraîne une surconsommation énergétique.