

### Devoir surveillé n°03 (Correction)

**Q1.** La valeur moyenne du signal est de l'ordre de **10 à 12 mV**.

**Q2.** En supposant le signal périodique, on observe deux périodes entre  $t_1 = 1,4$  ms et  $t_2 \approx 7,7$  ms, c'est à dire pour la période et la fréquence :

$$T_{co} = \frac{7,7 - 1,4}{2} \approx 3,2 \text{ ms} \Rightarrow \boxed{f_{co} = \frac{1}{T} \approx 3,2 \times 10^2 \text{ Hz}}$$

Il semble délicat de fournir plus de deux chiffres significatifs compte tenu de la précision de la lecture.

**Q3.** La guitare étant légèrement désaccordée, on peut attribuer cette fréquence au **Mi aigu** (désaccord de l'ordre de 3%).

**Q4.** Le signal n'étant pas sinusoïdal, le **spectre présentera nécessairement des fréquences harmoniques** multiples de la fréquence fondamentale.

**Q5.** On applique la formule du pont diviseur de tension :

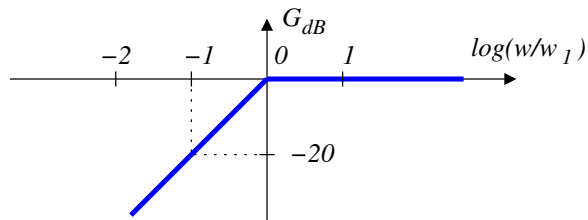
$$\underline{H}_1(j\omega) = \frac{R_1}{R_1 + \frac{1}{jC_1\omega}} \Rightarrow \boxed{\underline{H}_1(j\omega) = \frac{jR_1C_1\omega}{1 + jR_1C_1\omega}}$$

**Q6.** Posons  $\omega_1 = \frac{1}{\tau_1} = \frac{1}{R_1C_1}$  :

- pour  $\omega \ll \omega_1$ ,  $\underline{H}_1(j\omega) \approx j\omega\tau_1 \rightarrow 0$ ;
- pour  $\omega \gg \omega_1$ ,  $\underline{H}_1(j\omega) \approx 1$ .

Il s'agit d'un **filtre passe-haut du premier ordre**. Comme le montrera la question Q8., cette pulsation  $\omega_1$  correspond à la **pulsation de coupure** à -3 dB.

**Q7.** D'après les équivalents obtenus en haut et en basse fréquence, le diagramme de Bode pour le gain se compose d'une droite à +20 dB/décade à basse fréquence et d'une asymptote horizontale confondue avec l'axe des abscisses à haute fréquence.



**Q8.** Posons  $x = \omega/\omega_1$ ,  $|H(x)| = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ . On cherche  $x_c$  tel que :

$$|H(x_c)| = \frac{x_c}{\sqrt{1+x_c^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 2x_c^2 = 1+x_c^2$$

Ce qui impose  $x_c = 1$ , c'est à dire pour la pulsation de coupure  $\omega_c = \omega_1$ , et une fréquence de coupure :

$$\boxed{f_1 = \frac{1}{2\pi} \times \frac{1}{R_1C_1}}$$

Application numérique :  $f_1 = \frac{1}{2\pi} \times \frac{1}{100 \times 10^3 \times 100 \times 10^{-9}} \Rightarrow \boxed{f_1 \approx 16 \text{ Hz}}$ .

Ce filtre passe-haut permet d'**éliminer la composante continue du signal** tout en **préservant le fondamental** et ses harmoniques  $f_1 \ll f_{co}$ .

**Q9.** L'ALI étant idéal et fonctionnant en régime linéaire  $v_+ = v_-$ . De plus l'application de la formule du pont diviseur de tension conduit à :

$$v_- = \frac{\underline{Z}}{\underline{Z} + \underline{Z}'s} \Rightarrow \boxed{\underline{H}(j\omega) = 1 + \frac{\underline{Z}'}{\underline{Z}}}$$

**Q10.**  $\underline{H}(j\omega) = 1 + \frac{R'}{R}$ . On est en présence d'un **amplificateur non inverseur** qui comme son nom l'indique peut permettre d'amplifier un signal, comme le signal étudié ici dont l'amplitude n'est que de quelques mV.

**Q11.** Association parallèle :  $\boxed{\underline{Z}_{eq} = \frac{R_2}{1 + jR_2C_2\omega}}$ .

**Q12.** D'après ce qui précède :  $\boxed{\underline{H}_2(j\omega) = 1 + \frac{R_2}{R_3} \times \frac{1}{1 + jR_2C_2\omega}}$ .

**Q13.** Par identification  $\boxed{G_0 = R_2/R_3}$  et  $\boxed{\omega_2 = \frac{1}{R_2C_2}}$ .

**Q14.** Les limites de la fonction de transfert sont respectivement :

$$\boxed{\lim_{\omega \rightarrow 0} |\underline{H}_2|(\omega) = 1 + G_0 \quad \text{et} \quad \lim_{\omega \rightarrow +\infty} |\underline{H}_2|(\omega) = 1}$$

**Q15.** A.N. :  $f_2 = \frac{1}{2\pi} \times \frac{1}{680 \times 10^3 \times 470 \times 10^{-12}} \Rightarrow \boxed{f_2 = 498 \text{ Hz}}$ .

En prenant plutôt  $R_3 = 6,0 \times 10^3 \text{ k}\Omega$  :

$$G_0 = 1 + \frac{680}{6,0} \Rightarrow \boxed{G_0 = 1,1 \times 10^2}$$

Compte tenu de  $f_{co} < f_2$ , on peut conclure que **ce filtre va fortement amplifier le fondamental que l'on veut extraire et beaucoup moins les harmoniques** voire les recopier pour les fréquences les plus élevées.

**Q16.** On est en présence d'un **filtre passe-bande du second ordre** avec une pente de  $+20$  dB/décade à basse fréquence et  $-20$  dB/décade à haute fréquence avec une fréquence de résonance de  $329$  Hz, fréquence voisine du Mi aigu que l'on veut extraire.

**Q17.** La bande passante est définie par le domaine de fréquences pour lequel  $G_{dB,max} - 3 \text{ dB} \leq G_{dB}(f) \leq G_{dB,max}$ . Sur le graphique, on détermine les fréquences de coupure associées aux limites du domaine :

$$f \in [f_{c1}, f_{c2}] \quad \text{avec} \quad f_{c1} = 321 \text{ Hz} \quad \text{et} \quad f_{c2} = 337 \text{ Hz}$$

**Q18.** À  $315$  Hz, l'atténuation en décibel est de  $6$  dB, c'est à dire une **atténuation d'un facteur 2**, en effet  $20 \log(1/2) \approx -6$ .

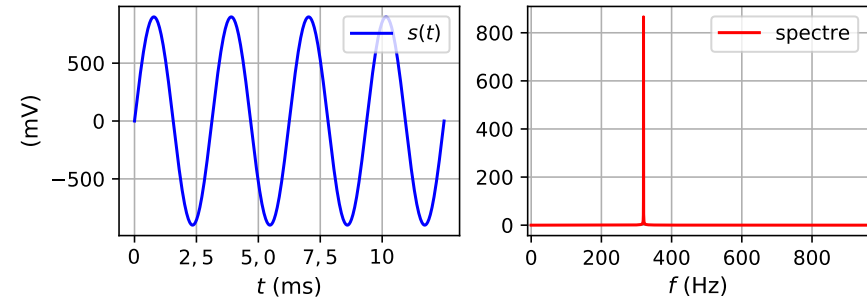
**Q19.** Le spectre présente :

- un pic à fréquence nulle d'amplitude  $10$  V associé à la composante continue du signal  $u_e$  (question Q1) ;
- un pic à une fréquence de l'ordre de  $300$  Hz associé à la fréquence du fondamental (question Q2) ;
- des harmoniques de fréquences multiples de la fréquence fondamentale pour ce signal qui n'est pas sinusoïdal.

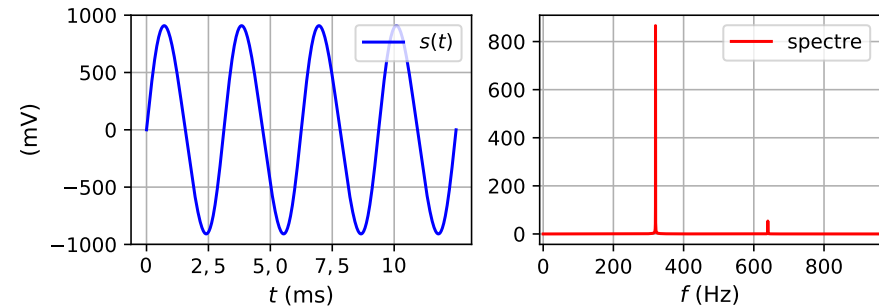
**Q20.** Suite à la traversée du filtre ( $F_a$ ), filtre passe-haut de fréquence de coupure  $15$  Hz, la composante continue a été éliminée et le reste du signal recopié à l'identique, le spectre associé est donc le **spectre (a)**.

**Q21.** Suite à la traversée du filtre ( $F_b$ ), le signal fondamental est amplifié d'un facteur proche de  $G_0$  passant d'une amplitude de  $18$  mV à une amplitude de  $1800$  mV, les harmoniques étant de moins en moins amplifiés au fur et à mesure que leur fréquence augmente. Le spectre associé au signal en sortie du filtre ( $F_b$ ) est donc le **spectre (d)**.

**Q22.** En première approximation, le filtre passe-bande ne va conserver que le fondamental en l'atténuant d'un facteur 2 (question Q18), c'est à dire un signal quasi-sinusoïdal d'amplitude  $900$  mV.



Complément : en toute rigueur l'harmonique de rang 2 ( $f \approx 6,4 \times 10^2$  Hz) sera atténué de  $30$  dB (d'après le diagramme de Bode du filtre), c'est à dire un facteur d'atténuation de  $10^{3/2}$ , soit une amplitude  $2,0 \times 10^3 / 10^{3/2} \approx 63$  mV.



Le tracé temporel précis nécessiterait de connaître le déphasage du filtre passe bande qui n'est pas fourni ici.

**Q23. L'absence de rétroaction sur la borne inverseuse assure un fonctionnement en saturation.**

Pour un ALI idéal, les résistances d'entrée sont infinies, les courants au niveau des bornes d'entrée sont nuls. De plus en saturation :

- $\varepsilon = V^+ - V^- > 0 \Rightarrow u_s = +U_{sat}$  ;
- $\varepsilon = V^+ - V^- < 0 \Rightarrow u_s = -U_{sat}$  ;

**Q24.** Sachant que  $i_+ = 0$ , on applique un pont diviseur de tension, il vient :

$$V^+ = \frac{R_4}{R_4 + R_5} u_s \Rightarrow \varepsilon = \frac{R_4}{R_4 + R_5} u_s - u_3$$

**Q25.**  $\varepsilon$  est une **fonction décroissante de  $u_3$** .

**Q26.** Pour  $\varepsilon > 0$ ,  $u_s = +U_{sat}$ . Le basculement s'opère pour  $\varepsilon = 0$ , c'est à dire

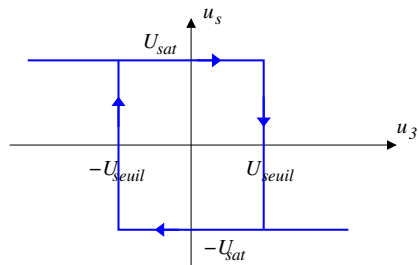
$$U_{seuil} = \frac{R_4}{R_4 + R_5} U_{sat}$$

Suite au basculement on a alors  $u_s = -U_{sat}$ , et  $\varepsilon = \frac{-R_4}{R_4 + R_5} U_{sat} - u_3$ .

**Q27.**  $u_3$  diminue alors jusqu'à atteindre la nouvelle annulation de  $\varepsilon$  :

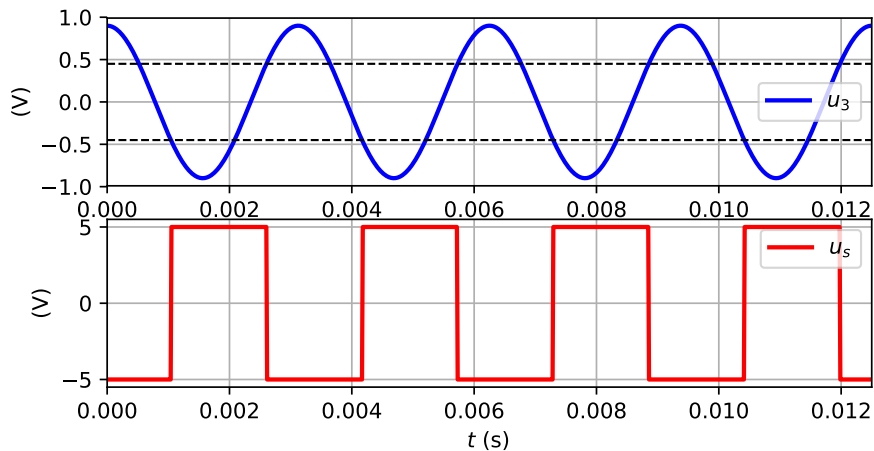
$$\frac{-R_4}{R_4 + R_5} U_{sat} - u_3 = 0 \Rightarrow u_3 = -U_{seuil} = \frac{-R_4}{R_4 + R_5} U_{sat}$$

**Q28.** On en déduit le cycle d'hystérésis :



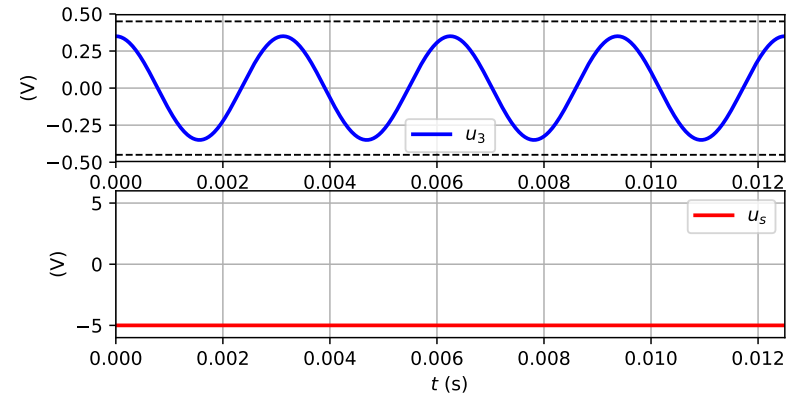
**Q29.** La tension de seuil vaut  $U_{seuil} = 0,45 \text{ V}$ .

— *première situation* :



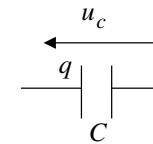
Partant d'une situation pour laquelle  $u_3 > U_{seuil}$ , la tension de sortie reste égale à  $-U_{sat}$  tant que  $u_3 > -U_{seuil}$  ; la tension bascule alors à  $+U_{sat}$  et se maintient à cette valeur tant que  $u_3 < U_{seuil}$ .

— *seconde situation* : la tension d'entrée ne franchit jamais la valeur seuil, la tension de sortie  $u_s$  ne bascule pas. En fonction des conditions initiales, la tension de sortie est égale à  $\pm U_{sat}$  et conserve cette valeur



**Q30.** Si la corde est trop mal accordée, la fréquence du fondamental sera trop éloignée de la bande passante du filtre passe-bande et l'amplitude du signal  $u_3$  sera trop faible, on n'obtiendra pas en sortie un signal créneau oscillant à la fréquence  $f_{co}$  qui ne pourra donc pas être comparée à la fréquence de référence (cf. second exemple de la question 29).

**Q31.** Relation tension charge pour un condensateur :  $q = C u_c$ .



**Q32.**  $q_1 = C_k(V_B - V_A)$  et  $q_2 = 0$  (tension nulle aux bornes du condensateur).

**Q33.** En une période  $\delta q = q_2 - q_1 = C_k(V_A - V_B)$ . Au bout d'un temps long, on peut quasiment confondre  $t/T_k$  et sa partie entière, en conséquence :

$$Q = C_k(V_A - V_B) \times \frac{t}{T_k}$$

**Q34.** L'intensité moyenne est le rapport de la charge transférée sur la durée, c'est à dire  $I_m = \frac{C_k(V_A - V_B)}{T_k}$  ou tout aussi bien en fonction de la fréquence :

$$I_m = C_k f_k (V_A - V_B)$$

**Q35.** La relation précédente peut se réécrire :

$$V_A - V_B = \frac{1}{C_k f_k} I_m$$

Il s'agit bien d'une relation de proportionnalité entre la tension et l'intensité de courant. Le dipôle est donc équivalent à un conducteur ohmique de résistance

$$R_k = \frac{1}{C_k f_k}$$

**Q36.** On peut considérer sur le principe un filtre de Wien dont la pulsation de résonance est donnée par  $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ ,  $R$  et donc  $\omega_0$  pouvant être ajustée *via* la fréquence de la capacité commutée. Bien évidemment le filtre proposé à un facteur de qualité très supérieur à un filtre de Wien.

**Q37.**  $\delta Q_{in} = j(x, t)Sdt - j(x + dx, t)Sdt \Rightarrow \delta Q_{in} = -\frac{\partial j}{\partial x} dx Sdt$

**Q38.**  $dU = \rho S dx c dT$

**Q39.** On applique un premier principe à la tranche d'épaisseur  $dx$  entre deux instants voisins  $t$  et  $t + dt$ . On suppose le système indéformable ce qui revient à négliger le travail des forces de pression vis à vis des transferts thermiques :

$$dU = \delta Q_{in} + \underbrace{\delta W}_{=0} = -\frac{\partial j}{\partial x} dx Sdt \Leftrightarrow \rho S dx c \frac{\partial T}{\partial t} dt = -\frac{\partial j}{\partial x} dx Sdt$$

C'est à dire :  $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0$

**Q40.** La loi de Fourier assure que le vecteur courant thermique est proportionnel au gradient de température. Dans le cas d'un problème à une dimension en cartésienne, la relation prend la forme suivante :

$$j = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$$

$\lambda$  est la conductivité thermique du matériau, le signe « - » assurant que le transfert thermique s'effectue bien du chaud vers le froid.

**Q41.** On reporte la loi de Fourier dans le bilan thermique :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow D = \frac{\lambda}{\rho c}$$

**Q42.** En régime stationnaire, on a  $\forall x \in ]0, e[$ ,  $\frac{d^2 T}{dx^2} = 0$ . Le champ de température est une fonction affine de la position ; compte tenu des conditions initiales on en déduit :

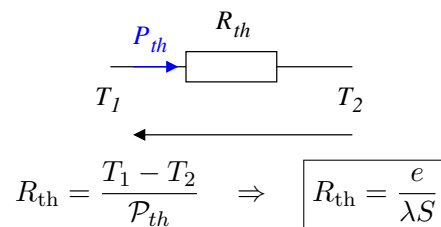
$$\forall x \in [0, e], T(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{e} \times x$$

**Q43.** D'après la loi de Fourier :  $j(x) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Rightarrow j(x) = \frac{\lambda(T_1 - T_2)}{e}$

Le vecteur courant thermique est uniforme. En régime permanent et en l'absence d'apports en volume, le flux thermique est nécessairement uniforme. Il vient :

$$\mathcal{P}_{th} = \frac{\lambda(T_1 - T_2)}{e} S$$

**Q44.** En convention récepteur, la résistance thermique est le rapport de la différence de température sur le flux thermique traversant le système :



**Q45.** Le flux thermique est le produit du vecteur courant thermique par la surface d'échange :

$$\mathcal{P}_{cc} = h(T_{2,p} - T_{2,f}) S \Leftrightarrow \frac{T_{2,p} - T_{2,f}}{\mathcal{P}_{cc}} = \frac{1}{hS}$$

**Q46.** La seconde relation ci-dessus assure que  $R_{cc} = \frac{1}{hS}$

**Q47.** Le coefficient conducto-convectif prend en compte les **mouvements de convection de l'air au voisinage de la vitre**, ces mouvements sont *a priori* plus importants à l'extérieur qu'à l'intérieur.

**Q48.** En régime stationnaire, il s'agit de l'application du **premier principe industriel** à l'air qui circule de l'extérieur vers l'intérieur et pour lequel on néglige les variations d'énergie cinétique et potentielle vis à vis des variations d'enthalpie :

$$\mathcal{P}_{air\ neuf} = D_m \Delta h = D_m c_p (T_{int} - T_{ext})$$

**Q49.** Les passagers se comportant comme des sources d'énergie thermique, la

situation la plus défavorable correspond à la **rame vide**.

**Q50.** La structure de la voiture est assimilée à un parallélépipède rectangle de longueur  $L$ , de largeur  $\ell$  et de hauteur  $h$  c'est à dire de surface totale  $2 \times (Lh + \ell h + L\ell)$  à laquelle il faut retrancher la surface des vitres, c'est à dire une surface équivalente :  $\mathcal{A}_{eq,v} = 2 \times (Lh + \ell h + L\ell) - 12L_v H_v \approx 211 \text{ m}^2$ . Pour cette surface équivalente, le flux thermique va traverser le stratifié, l'aluminium et la laine de verre qui sont en série et donc les effets vont s'ajouter pour engendrer la résistance thermique de la structure :

$$R_{th,str.} = \frac{e_{Al}}{\lambda_{Al}\mathcal{A}_{eq,v}} + \frac{e_{st}}{\lambda_{st}\mathcal{A}_{eq,v}} + \frac{e_{lv}}{\lambda_{lv}\mathcal{A}_{eq,v}} \approx \frac{e_{lv}}{\lambda_{lv}\mathcal{A}_{eq,v}}$$

$$\text{A.N : } R_{th,str.} = \frac{24 \times 10^{-3}}{0,051 \times 211} = 2,23 \times 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

L'approximation finale tient compte du fait que la laine de verre est de loin le meilleur isolant et que son épaisseur est très supérieure à celles des deux autres matériaux.

On tient maintenant compte de la résistance thermique des 12 vitres en considérant en série les deux couches de verre, l'air emprisonné et les effets conducto-convectifs. Les 12 vitres sont équivalentes à une unique vitre de surface équivalente 12 fois plus grande, car les vitres sont en parallèle.

$$R_{vit} = \frac{1}{12 \times L_v H_v} \times \left( \frac{e_{vi} + e_{ve}}{\lambda_v} + \frac{e_{air}}{\lambda_{air}} + \frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_e} \right)$$

Là encore on pourrait sans doute négliger la résistance thermique des parois en verre vis à vis de l'air emprisonné.

$$R_{vit} = \frac{1}{12 \times 2 \times 0,84} \times \left( \frac{2 \times 4,0 \times 10^{-3}}{1,15} + \frac{1,2 \times 10^{-2}}{0,03} + \frac{1}{8} + \frac{1}{25} \right)$$

$$R_{vit} = 28,3 \times 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$$

Les résistances des vitres et de la structure sont en parallèles, cependant la résistance de la structure étant significativement inférieure, le flux thermique s'écoule essentiellement par la structure qui impose la résistance thermique de l'ensemble :

$$R_{tot} \approx R_{th,str} = 2,2 \times 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$$

La structure ayant été quelque peu simplifiée (pas de prise en compte des portes par exemple, il serait illusoire de donner le résultat avec plus de deux chiffres significatifs).

**Q51.** On considère comme système l'intérieur de la voiture ; **en régime station-**

**naire les apports doivent compenser les pertes** : la puissance du chauffage  $\mathcal{P}_{ch}$  doit permettre de chauffer l'air qui entre associé à une puissance  $\mathcal{P}_{air\text{ neuf}}$  et de compenser les pertes associées au flux sortant *via* la résistance thermique :

$$\mathcal{P}_{ch} = \mathcal{P}_{air\text{ neuf}} + \frac{T_{int} - T_{ext}}{R_{tot}} \Rightarrow \boxed{\mathcal{P}_{ch} = D_m c_p (T_{int} - T_{ext}) + \frac{T_{int} - T_{ext}}{R_{tot}}}$$

$$\mathcal{P}_{ch} = \left( 1,2 \times \frac{2100}{3600} \times 1,0 \times 10^3 + \frac{1}{2,2 \times 10^{-3}} \right) \times 24 \Rightarrow \boxed{\mathcal{P}_{ch} = 28 \text{ kW}}$$

**Q52.** Chaque passager fournit une puissance de 60 W ; avec 50 passages dans la rame, les passagers fournissent 3,0 kW et la puissance de chauffage est réduite à :

$$\boxed{\mathcal{P}_{ch} = 25 \text{ kW}}$$

**Q53.** Par définition  $\boxed{\vec{j} = nq\vec{v}}$ .

**Q54.** L'intensité orientée dans le sens des  $x$  croissants est positive donc  $\boxed{\vec{j} \cdot \vec{u}_x > 0}$ , en revanche du fait de la charge négative des porteurs de charge,  $\boxed{\vec{v} \cdot \vec{u}_x < 0}$ .

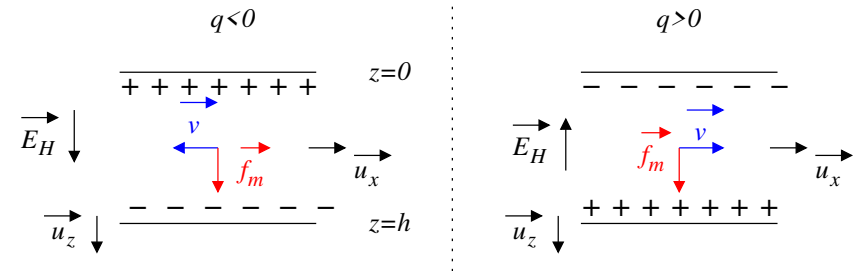
**Q55.** Le sens du vecteur courant n'est pas affecté mais, pour des charges positives,  $\boxed{\vec{v} \cdot \vec{u}_x > 0}$ .

**Q56.** Partons de l'expression de la force magnétique :

$$\vec{f}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B} = \frac{j}{n} \wedge \vec{B} = \frac{j}{n} \vec{u}_x \wedge B_0 \vec{u}_y = \frac{jB_0}{n} \vec{u}_z$$

Les charges subissent une force selon  $+\vec{u}_z$  et vont se déposer sur la plaque  $z = h$ , le conducteur étant globalement neutre des charges opposées apparaissent sur la face en regard d'équation  $z = 0$ .

**Q57.** Compte tenu de la question précédente :



**Q58.** Il apparaît une différence de potentiel donc une tension entre les faces d'équation  $z = 0$  et  $z = H$ , le **signe de cette tension que l'on mesure avec un voltmètre nous renseigne sur le signe des charges mobiles**.

**Q59.** Le champ électrique est dirigé des charges positives vers les charges négatives, donc  $\vec{E}_H = E_H \vec{u}_z$  avec  $E_H > 0$  dans le cas de charges mobiles négatives (Cf. schéma précédent).

**Q60.** Pour des particules élémentaires, on néglige leur poids vis à vis des forces électrique et magnétique ; en régime permanent, le mouvement des charges est inertiel et les forces se compensent d'après la première loi de Newton :

$$\vec{0} = -e\vec{E}_H - e\vec{v}_e \wedge \vec{B} \Rightarrow \vec{E}_H = -\vec{v}_e \wedge \vec{B}$$

**Q61.** Pour des charges négatives,  $\vec{v}_e = -v_e \vec{u}_x$ , c'est à dire :

$$\vec{E}_H = v_e \vec{u}_x \wedge B_0 \vec{u}_y \Rightarrow \boxed{\vec{E}_H = v_e B_0 \vec{u}_z}$$

De plus on a  $I = j \times hb = n_e e v_e h b$ , c'est à dire  $v_e = \frac{I}{n_e e h b}$ , il vient :

$$\boxed{\vec{E}_H = \frac{I B_0}{n_e e h b} \vec{u}_z}$$

**Q62.** D'après le schéma de la question **Q57**, on sait que cette tension sera négative :

$$U_H = -E_H \times h \Rightarrow \boxed{U_H = -\frac{I B_0}{n_e e b}}$$

**Q63.** Le raisonnement est identique au précédent, la tension étant maintenant positive comme l'indique le schéma de droite de la question **Q57** :

$$\boxed{U_H = \frac{I B_0}{n_p e b}}$$

**Q64.** La densité particulaire des électrons libres est égale à la densité particulaire du cuivre :

$$n_e = n_{Cu} = \frac{\mu_{Cu} \times \mathcal{N}_a}{M_{Cu}} = \frac{8,9 \times 10^3 \times 6,02 \times 10^{23}}{63,5 \times 10^{-3}} = 8,44 \times 10^{28} \text{ part.} \cdot \text{m}^{-3}$$

$$U_H = -\frac{0,1 \times 0,1}{8,44 \times 10^{28} \times 1,6 \times 10^{-19} \times 0,2 \times 10^{-3}} \Rightarrow \boxed{U_H \approx -4 \times 10^{-9} \text{ V}}$$

**Q65.** Les sondes à effet Hall sont utilisées pour mesurer des champs magnétiques *via* des mesures de tension. Une sonde à effet Hall ne peut pas être réalisée en cuivre, un champ magnétique même relativement intense engendre des tensions de Hall trop faibles pour être détectées aisément avec un voltmètre.

**Q66.** La densité particulaire est plus faible d'un facteur  $8,3 \times 10^{-7}$ , c'est à dire

pour la nouvelle tension mesurée :

$$U_H = -\frac{3,7 \times 10^{-9}}{8,3 \times 10^{-7}} \Rightarrow \boxed{U_H \approx -4 \text{ mV}}$$

Cette valeur de tension peut être mesurée à l'aide d'un voltmètre, une amplification pouvant être ajoutée si nécessaire. **Les sondes à effet Hall sont fabriquées à l'aide de matériaux semi-conducteur pour lesquels la densité particulière est significativement plus faible que celle des conducteurs métalliques.**