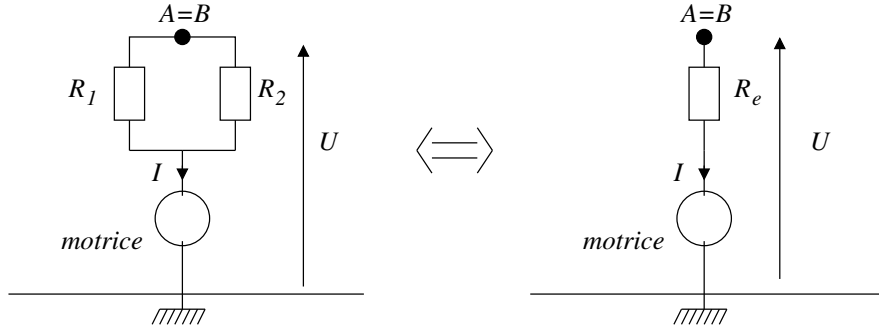


## Devoir surveillé n°01 (correction)

### 1 Caténaire (CCP PSI modélisation, 2018, extrait)

1. Les points  $A$  et  $B$  étant au même potentiel, les résistances  $R_1$  et  $R_2$  peuvent être considérées comme étant en parallèle :



C'est à dire pour la résistance équivalente :

$$R_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{rx \times r(L-x)}{rL} = \frac{r(L-x)x}{L} \Leftrightarrow R_e = Lr \left(1 - \frac{x}{L}\right) \times \frac{x}{L}$$

2. En posant  $u = x/L$ , on considère l'application  $f : u \rightarrow (1-u) \times u$ . Cette application est nulle en  $u = 0$  et  $u = 1$  et est maximale en  $u = 1/2$ .

$R_e$  est donc maximale en  $x = L/2$ .

3. Pour  $x = L/2$ ,  $R_e = \frac{Lr}{4}$ . Application numérique :

$$R_e = \frac{10 \times 0,020}{4} \Rightarrow R_e = 0,050 \Omega$$

4. La résistance équivalente est parcourue par le courant d'intensité  $I$  :

$$U_R = R_e \times I \quad U_R = 0,050 \times 2,5 \times 10^3 \quad U_R = 1,3 \times 10^2 \text{ V}$$

5. La puissance générée  $\mathcal{P}_g = UI$  se répartit entre la puissance dissipée par effet Joule  $\mathcal{P}_J = U_R I$  et la puissance fournie à la motrice  $\mathcal{P}_m$  :

$$\mathcal{P}_g = \mathcal{P}_J + \mathcal{P}_m \Rightarrow UI = U_R I + \mathcal{P}_m$$

Le rendement  $\eta$  est le rapport de la puissance utile motrice à la puissance générée :

$$\eta = \frac{\mathcal{P}_m}{\mathcal{P}_g} = \frac{UI - U_R I}{UI} \Leftrightarrow \eta = \frac{U - U_R}{U} = 1 - \frac{U_R}{U}$$

Application numérique :  $\eta = 1 - \frac{125}{1500} \Rightarrow \eta = 91,7\%$ .

$U_R = 0$  pour  $x = 0$  ou  $x = L$ , le rendement est unitaire en  $A$  ou  $B$ .

### 2 Mission PSP (extrait CS, MP, 2018)

1. On se place dans le référentiel héliocentrique supposé galiléen. D'après la conservation du moment cinétique pour un mouvement à force centrale (constante des aires), le mouvement circulaire se fait nécessairement à vitesse constante. En appelant  $v$  la vitesse,  $R$  le rayon de la trajectoire et  $T$  la période de révolution :  $v = \frac{2\pi R}{T}$ .

On applique alors le principe fondamental de la dynamique au corps soumis à la force de gravitation avec  $M$  la masse de l'attracteur :

$$m\vec{a} = -\frac{GMm}{R^2}\vec{u}_r \Rightarrow \underbrace{-\frac{v^2}{R}}_{\vec{a}_r} = -\frac{GM}{R^2} \Leftrightarrow v^2 = \frac{GM}{R}$$

On en déduit :

$$\frac{4\pi^2 R^2}{T^2} = \frac{GM}{R} \Leftrightarrow \frac{R^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

2. Le demi-grand axe de la trajectoire elliptique de la sonde vaut  $a_s = \frac{r_a + r_p}{2}$ .

On applique alors la troisième loi de Kepler dans sa version historique pour la Terre (indice  $T$ ) et la sonde (indice  $s$ ) en rotation autour du même attracteur le Soleil :

$$\frac{r_T^3}{T_T^2} = \frac{a_s^3}{T_s^2} \Leftrightarrow T_s = T_T \times \left(\frac{a_s}{r_T}\right)^{3/2}$$

Application numérique :

$$T_s = 365,25 \times \left(\frac{(0,73 + 0,046)/2}{1}\right)^{3/2} \Rightarrow T_s = 88,3 \text{ jours}$$

3. On exprime de deux façons l'énergie mécanique de la sonde pour un mouvement elliptique :

$$E_M = -\frac{GM_s m}{2a_s} = -\frac{GM_s m}{r_a + r_p} \quad \text{et} \quad E_M = \frac{1}{2} m v_p^2 - \frac{GM_s m}{r_p}$$

On en déduit :

$$\frac{v_p^2}{2} = \frac{GM_s}{r_p} - \frac{GM_s}{r_a + r_p} = \frac{GM_s r_a}{r_p(r_a + r_p)} \Leftrightarrow v_p = \sqrt{\frac{2GM_s r_a}{r_p(r_a + r_p)}}$$

On élimine le terme  $GM_s$  grâce à la troisième loi de Kepler pour la Terre

$$GM_s = \frac{4\pi^2 r_T^3}{T_T^2} :$$

$$v_p = \sqrt{\frac{8\pi^2 r_T^3 r_a}{r_p(r_a + r_p) T_T^2}} \Rightarrow v_p = \frac{2\pi r_T}{T_T} \times \sqrt{\frac{2r_T r_a}{r_p(r_a + r_p)}}$$

Application numérique :

$$v_p = \frac{2\pi \times 1,5 \times 10^{11}}{365,25 \times 24 \times 3600} \times \sqrt{\frac{2 \times 1 \times 0,73}{0,046 \times (0,73 + 0,046)}} \quad \boxed{v_p = 191 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}}$$

4. On applique l'équation de la trajectoire au périhélie ( $\theta = 0$ ) et à l'apogée ( $\theta = \pi$ ) :

$$r_p = \frac{p}{1+e} \quad \text{et} \quad r_a = \frac{p}{1-e}$$

En résolvant ce système, on en déduit :

$$e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p} \quad \text{et} \quad p = \frac{2r_a r_p}{r_a + r_p}$$

Application numérique :

$$e = \frac{0,73 - 0,046}{0,73 + 0,046} \Rightarrow \boxed{e = 0,88} ;$$

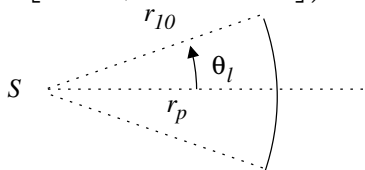
$$p = \frac{2 \times 0,73 \times 0,046}{0,73 + 0,046} \Rightarrow \boxed{p = 8,65 \times 10^{-2} \text{ u.a.} \simeq 1,3 \times 10^{10} \text{ m}}$$

5. On commence par évaluer l'angle  $\theta_l$  pour lequel  $r(\theta_l) = r_{10}$  :

$$r(\theta_l) = \frac{p}{1+e \cos(\theta_l)} = r_{10} \Leftrightarrow \frac{p}{r_{10}} = 1 + e \cos(\theta_l)$$

$$\text{On en déduit } \theta_l = \arccos\left(\frac{1}{e} \times \left[\frac{p}{r_{10}} - 1\right]\right) :$$

$$\theta_l = \arccos\left(\frac{1}{0,8814} \times \left[\frac{12,98 \times 10^9}{10 \times 6,96 \times 10^8} - 1\right]\right) \Rightarrow \boxed{\theta_l = 0,194 \text{ rad}}$$



Comme  $\theta_l \ll 1 \text{ rad}$ , on assimile le mouvement elliptique à un mouvement circulaire au voisinage du périhélie. On peut considérer que la sonde parcourt la distance  $2r_p \theta_l$  à la vitesse  $v_p$  en une durée :

$$\tau \simeq \frac{2r_p \theta_l}{v_p} = \frac{2 \times 4,6 \times 10^{-2} \times 1,5 \times 10^{11} \times 0,194}{191 \times 10^3} = 14 \times 10^3 \text{ s} \quad \boxed{\tau \simeq 4 \text{ h}}$$

### 3 Mesures du champ de pesanteur (CS, MP, 2018)

#### 3.1 Le pendule de Richter

1. En négligeant les frottements, l'énergie mécanique de la masse se conserve au cours de l'oscillation :

$$E_M = \frac{1}{2}mv^2 - mgx = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mg\ell \cos(\theta)$$

En dérivant par rapport au temps, on en déduit :

$$\frac{1}{2}m\ell^2 \times 2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mg\ell \sin(\theta)\dot{\theta} = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin(\theta) = 0$$

Pour les petits angles :  $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$  avec  $\omega_0^2 = \frac{g}{\ell}$ .

$$\text{Et donc pour la période propre : } T = \frac{2\pi}{\omega_0} \Rightarrow \boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}}$$

2. On note  $T_1$  la période d'oscillation à Paris et  $T_2$  celle à Cayenne. En 24 h, le pendule à Paris bat la seconde et effectue  $N_1 = 86400$  oscillations ; **en cette même durée** le pendule situé à Cayenne effectue  $N_2 = 86252$  oscillations, ce qui donne :

$$N_1 T_1 = N_2 T_2 \Leftrightarrow N_1 \times 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g_1}} = N_2 \times 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g_2}}$$

On en déduit :

$$g_2 = g_1 \times \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 = 9,81 \times \left(\frac{86252}{86400}\right)^2 \Rightarrow \boxed{g_2 = 9,78 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}$$

3. On effectue la différentielle logarithmique de la formule du pendule simple en supposant la longueur fixée :

$$T = 2\pi \times \ell^{1/2} \times g^{-1/2} \Rightarrow \frac{\delta T}{T} = -\frac{1}{2} \times \frac{\delta g}{g}$$

Pour un pendule battant la seconde, une incertitude  $\Delta g$  du champ de pesanteur est associée à une incertitude  $\Delta T$  de la mesure de la période telle que :

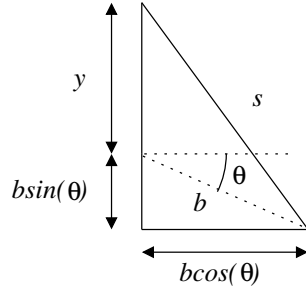
$$\Delta T = \frac{T}{2} \times \frac{\Delta g}{g} = \frac{1,0}{2} \times \frac{10^{-6} \times 1,00 \times 10^{-2}}{9,81} \Rightarrow \boxed{\Delta T = 5 \times 10^{-10} \text{ s}}$$

### 3.2 Gravimètre à fléau de LaCoste et Romberg

1. Sous l'effet du poids, le ressort s'étire. L'intensité du champ de pesanteur terrestre sera accessible *via* la mesure de l'élongation du ressort.

$$2. E_p = \frac{1}{2}k(s - s_0)^2 - mga \sin(\theta)$$

3. On peut aisément déterminer  $s$  à l'aide du triangle rectangle suivant :



$$s^2 = (y + b \sin(\theta))^2 + b^2 \cos^2(\theta) = y^2 + b^2 \sin^2(\theta) + b^2 \cos^2(\theta) + 2by \sin(\theta)$$

$$\Rightarrow s = \sqrt{y^2 + b^2 + 2by \sin(\theta)}$$

4. Sachant que  $E_p(\theta) = \frac{1}{2}k(\sqrt{y^2 + b^2 + 2by \sin(\theta)} - s_0)^2 - mga \sin(\theta)$  :

$$\Gamma = mga \cos(\theta) - \frac{k}{2} \times 2 \left( \sqrt{y^2 + b^2 + 2by \sin(\theta)} - s_0 \right) \times \frac{1}{2} \times \frac{2yb \cos(\theta)}{\sqrt{y^2 + b^2 + 2by \sin(\theta)}}$$

$$\Leftrightarrow \Gamma = \left( mga - kyb + \frac{k y b s_0}{\sqrt{y^2 + b^2 + 2by \sin(\theta)}} \right) \cos(\theta)$$

5. Avec  $s_0 = 0$ ,  $\Gamma = 0 \Leftrightarrow g = \frac{kyb}{ma}$ . En réglant  $y$  tel que  $\Gamma = 0$ , on en déduit  $g$  grâce à la relation précédente.

6. Par une méthode similaire à la précédente ou en utilisant le théorème d'Al-Kashi :

$$s^2 = b^2 + y^2 - 2by \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta - \phi\right) \Rightarrow s = \sqrt{b^2 + y^2 + 2by \sin(\theta - \phi)}$$

$$\text{Avec } s_0 = 0, \text{ on en déduit : } E'_p = \frac{k}{2} [b^2 + y^2 + 2by \sin(\theta - \phi)] - mga \sin(\theta)$$

7. Le système utilise l'annulation du couple, elle-même associée à un extremum d'énergie potentielle. On constate que, **pour  $\phi \neq 0$ , cet extremum est un minimum**. Pour  $\phi = 0$ , l'annulation du couple correspond à une position instable qui ne peut être utilisée pour la mesure.

$$8. \text{ Avec } \Gamma' = -\frac{\partial E'_p}{\partial \theta} : \Gamma' = mga \cos(\theta) - \frac{k}{2} \times 2by \cos(\theta - \phi) \\ \Leftrightarrow \Gamma' = mga \cos(\theta) - kby [\cos(\theta) \cos(\phi) + \sin(\theta) \sin(\phi)] \\ \Leftrightarrow \Gamma' = [mga - kyb \cos(\phi)] \cos(\theta) - kyb \sin(\phi) \sin(\theta)$$

9. On applique le théorème du moment cinétique au système en projection selon l'axe  $Oz$  :

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = \Gamma' = [mga - kyb \cos(\phi)] \cos(\theta) - kyb \sin(\phi) \sin(\theta)$$

À l'ordre 1 en  $\theta$ , l'équation se simplifie selon :

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = [mga - kyb \cos(\phi)] - kyb \sin(\phi) \times \theta$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{kby}{J} \sin(\phi) \times \theta = \frac{1}{J} (mga - kyb \cos(\phi))$$

10. L'équation précédente est l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsa-

$$\text{tion } \omega_0 = \sqrt{\frac{kby}{J} \sin(\phi)}.$$

La position moyenne correspondant à la position d'équilibre

$$\theta_0 = \frac{mga - kyb \cos(\phi)}{kby \sin(\phi)}$$

11. En annulant la position moyenne :  $kby = \frac{mg_0 a}{\cos(\phi)}$ , on en déduit pour la période propre  $T_0 = 2\pi/\omega_0$  :

$$T_0^2 = \frac{4\pi^2 J}{kby \sin(\phi)} = \frac{4\pi^2 J}{mg_0 a \tan(\phi)} = \frac{4\pi^2 m a^2}{mg_0 a \tan(\phi)} = \frac{4\pi^2 a}{g_0 \tan(\phi)}$$

On en déduit :  $\tan(\phi) = \frac{4\pi^2 a}{g_0 T_0^2}$ . Application numérique :

$$\tan(\phi) = \frac{4\pi^2 \times 1,0 \times 10^{-2}}{10 \times 20^2} \Rightarrow \phi \simeq 9,9 \times 10^{-5} \text{ rad}$$

$$12. \theta'_0 = \frac{m(g_0 + \Delta g)a - kby \cos(\phi)}{kby \sin(\phi)} = \underbrace{\frac{m g_0 a - kby \cos(\phi)}{kby \sin(\phi)}}_{\theta_0=0} + \frac{m \Delta g \times a}{kby \sin(\phi)}$$

$$\text{Avec } kby = \frac{mg_0 a}{\cos(\phi)}, \text{ on obtient : } \theta'_0 = \frac{\Delta g}{g_0 \tan(\phi)}$$

13. Application numérique :

$$\theta'_0 = \frac{10 \times 10^{-6} \times 10^{-2}}{10 \times 9,87 \times 10^{-5}} \Rightarrow \boxed{\theta'_0 = 1,0 \times 10^{-4} \text{ rad}}$$

Cet angle correspond à 21 secondes d'arc ce qui semble tout à fait mesurable, on peut par exemple penser à des mesures effectuées avec un goniomètre.

## 4 Compression dans un caisson (CS, MP, 2010)

1. Les molécules d'air sont initialement enfermées à la pression  $P_0$  dans les  $N$  compresseurs et le caisson pour un volume total  $N(V_0 + v) + V_c$ . En fin de compression la pression est  $P_1$  et le volume  $Nv + V_c$ . À température fixée, la conservation du nombre de moles pour un gaz parfait assure :

$$P_0 [N(V_0 + v) + V_c] = P_1 [Nv + V_c] \Rightarrow \boxed{P_1 = \frac{P_0 [N(V_0 + v) + V_c]}{Nv + V_c}}$$

En comparant le nombre de moles entre l'instant final et l'instant initial, on en déduit :

$$\begin{aligned} \Delta n = n_f - n_i &= \frac{P_1 V_c}{RT_0} - \frac{P_0 V_c}{RT_0} = \frac{V_c}{RT_0} (P_1 - P_0) \\ \Rightarrow \Delta n &= \frac{P_0 V_c}{RT_0} \times \frac{NV_0}{Nv + V_c} \end{aligned}$$

Application numérique :

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{1,0 \times [10 \times (2,0 + 0,50) + 150]}{10 \times 0,50 + 150} \Rightarrow \boxed{P_1 = 1,13 \text{ bar}} \\ \Delta n &= \frac{1,0 \times 10^5 \times 150}{8,31 \times 290} \times \frac{10 \times 2,0}{10 \times 0,50 + 150} \Rightarrow \boxed{\Delta n = 803 \text{ moles}} \end{aligned}$$

2. L'air a été aspiré à la pression  $P_0$  dans les  $N$  compresseurs, tandis que la pression vaut  $P_i$  dans le caisson. En fin de compression, le gaz est à la pression  $P_{i+1}$  dans l'ensemble du dispositif ; à température fixée, la conservation de la matière impose :

$$\begin{aligned} P_0 \times N(V_0 + v) + P_i V_c &= P_{i+1} (Nv + V_c) \\ \Leftrightarrow P_{i+1} &= P_i \times \frac{V_c}{Nv + V_c} + \frac{P_0 N(V_0 + v)}{Nv + V_c} \end{aligned}$$

On identifie alors avec l'expression de l'énoncé :  $P_{i+1} = aP_i + b(1-a)P_0$ , ce qui impose :

$$a = \frac{V_c}{Nv + V_c} \quad \text{et} \quad b(1-a) = \frac{N(V_0 + v)}{Nv + V_c}$$

$$\text{C'est à dire : } \boxed{a = \frac{V_c}{Nv + V_c} \quad \text{et} \quad b = \frac{V_0 + v}{v}}$$

Application numérique :

$$\begin{aligned} a &= \frac{150}{150 + 5,0} = \frac{150}{155} \Rightarrow \boxed{a = \frac{30}{31} = 0,968} \\ b &= \frac{2,0 + 0,50}{0,50} \Rightarrow \boxed{b = 5,0} \end{aligned}$$

3. Posons  $u_i = P_i - bP_0$  ; on est alors en présence d'une suite géométrique de raison  $a$  ce qui assure qu'au bout de  $n$  va-et-vient :

$$u_n = a^n u_0$$

La pression initiale dans le caisson valant  $P_0$ , on a  $u_0 = P_0 - bP_0 = (1-b)P_0$ , donc :

$$P_n - bP_0 = a^n (1-b)P_0 \Leftrightarrow \boxed{P_n = bP_0 + a^n (1-b)P_0}$$

Comme  $a < 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = P_\infty = bP_0 = \frac{V_0 + v}{v} P_0$ .

Interprétation : la pression atteint sa valeur limite quand le système n'est plus en mesure de faire entrer de nouvelles molécules d'air lors de l'aspiration. Supposons que le piston soit en position  $CD$ , avec une pression  $P$  dans le compresseur et un volume  $v$  disponible. Lors de l'aspiration isotherme et en l'absence d'ouverture de la soupape  $S_1$ , la pression peut descendre jusqu'à  $Pv/(V_0 + v)$ . Si cette pression est supérieure à  $P_0$ , la soupape  $S_1$  ne peut plus s'ouvrir, à la limite :

$$\frac{P_{lim} v}{V_0 + v} = P_0 \Leftrightarrow \boxed{P_{lim} = \frac{P_0 (V_0 + v)}{v}}$$

On retrouve sans calcul l'expression de  $P_\infty$ .

4.  $\boxed{P_\infty = 5,0 \text{ bar}}$ . On cherche  $p$  tel que  $P_p = P_f = 3P_0$ , c'est à dire :

$$P_f - bP_0 = a^p (1-b)P_0 \Leftrightarrow \frac{P_f - bP_0}{(1-b)P_0} = a^p \Leftrightarrow p \ln(a) = \ln \left( \frac{P_f - bP_0}{(1-b)P_0} \right)$$

Application numérique :

$$p = \frac{\ln \left( \frac{3-5}{1-5} \right)}{\ln(0,96774)} \Rightarrow p = 21,1$$

On retient donc le nombre entier  $p = 22$ .

5. Le gaz subit une compression isotherme :

$$w = - \int_{V_i}^{V_f} P dV = -nRT_0 \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} = nRT_0 \ln \left( \frac{V_i}{V_f} \right) = nRT_0 \ln \left( \frac{NV_0 + Nv + V_c}{Nv + V_c} \right)$$

En utilisant l'état initial du gaz :  $nRT_0 = P_0 [NV_0 + Nv + V_c]$  :

$$w = P_0 [NV_0 + Nv + V_c] \ln \left( \frac{NV_0 + Nv + V_c}{Nv + V_c} \right)$$

Pour une évolution isotherme d'un gaz parfait  $\Delta U = 0$ , en conséquence

$$q = -w$$

Application numérique :

$$w = 1,0 \times 10^5 \times 175 \times \ln \left( \frac{175}{155} \right) \Rightarrow w = 2,1 \text{ MJ}$$

6. Lors de la compression le volume du système diminue de  $NV_0$ , ce qui représente pour le travail des forces de pression de l'air extérieur :

$$w_{air} = NP_0V_0$$

Le moteur ne fournit donc en conséquence que le travail :

$$W_{aller} = P_0 [NV_0 + Nv + V_c] \ln \left( \frac{NV_0 + Nv + V_c}{Nv + V_c} \right) - NP_0V_0$$

$$W_{aller} = P_1 [Nv + V_c] \ln \left( \frac{P_1}{P_0} \right) - NP_0V_0$$

7. À la suite de la première compression, la pression dans le compresseur, dont le volume est alors  $v$ , est  $P_1$ . La soupape  $S_1$  s'ouvre lorsque la pression dans le compresseur s'abaisse à  $P_0$ . Juste avant l'ouverture de la soupape, la conservation de la matière à température fixée impose alors :

$$P_0(v + sx_1) = P_1v = P_0 \frac{NV_0 + Nv + V_c}{Nv + V_c} \times v \Leftrightarrow x_1 = \frac{v}{s} \times \frac{NV_0}{Nv + V_c}$$

$$\text{Ou si l'on préfère avec } V_0 = sd : x_1 = d \times \frac{Nv}{Nv + V_c}$$

8. Lors de la phase retour, il suffit de s'intéresser à la phase jusqu'à ouverture de la soupape  $S_1$ , ensuite les pressions dans le compresseur et dans l'air sont égales à  $P_0$  et le déplacement se fait naturellement sans effort.

Dans cette phase, la soupape  $S_2$  est fermée et il n'y a pas à s'intéresser au caisson.

Durant la détente jusqu'à  $x_1$ , les  $n'$  moles initialement à la pression  $P_1$  dans le volume  $Nv$  sont détendues jusqu'à la pression  $P_0$  pour un volume  $N(v + sx_1)$ , le travail reçu par le gaz s'écrit :

$$w' = -n'RT_0 \int_{Nv}^{N(v+sx_1)} \frac{dV}{V} = -n'RT_0 \ln \left( \frac{v + sx_1}{v} \right) = -n'RT_0 \ln \left( \frac{P_1}{P_0} \right)$$

Les  $n'$  moles sont initialement dans le volume  $Nv$  à la pression  $P_1$  en conséquence :

$$w' = -P_1Nv \ln \left( \frac{P_1}{P_0} \right)$$

Ce travail  $w'$  est la somme du travail du moteur sur la phase retour et du travail de l'air lors de la détente jusqu'à  $x_1$  sous la pression  $P_0$ , c'est à dire  $w'_{air} = -P_0Nvx_1$ , c'est à dire :

$$W_{ret.} = P_0Nvx_1 - P_1Nv \ln \left( \frac{P_1}{P_0} \right) = P_0Nv \times \frac{NV_0}{Nv + V_c} - P_1Nv \ln \left( \frac{P_1}{P_0} \right)$$

9. En sommant les expressions des travaux à l'aller et au retour, on obtient :

$$W_m = W_{aller} + W_{ret.} = P_1V_c \ln \left( \frac{P_1}{P_0} \right) + P_0Nv \frac{NV_0}{Nv + V_c} - NP_0V_0$$

Avec :

$$P_0Nv \frac{NV_0}{Nv + V_c} - NP_0V_0 = P_0NV_0 \left( \frac{Nv}{Nv + V_c} - 1 \right) = \frac{-P_0NV_0}{Nv + V_c} \times V_c$$

$$\text{Or : } P_0 - P_1 = P_0 \left( 1 - \frac{NV_0 + Nv + V_c}{Nv + V_c} \right) = -\frac{P_0NV_0}{Nv + V_c}$$

Ce qui conduit au résultat souhaité :

$$W_m = P_1V_c \ln \left( \frac{P_1}{P_0} \right) + (P_0 - P_1)V_c$$

Application numérique :

$$W_m = 1,13 \times 10^5 \times 150 \times \ln(1,13) + (1,0 - 1,13) \times 10^5 \times 150$$

$$\text{C'est à dire : } W_m = 1,2 \times 10^2 \text{ kJ}$$