

## Ondes

**1. Réponse : C.**

Une onde stationnaire est de la forme  $\Psi_f(x, t) = \psi_m \cos(\omega t + \varphi_t) \cos(k_f x + \varphi_x)$ .  
 La condition  $\forall t, \Psi_f(0, t) = 0$  impose  $\cos(\varphi_x) = 0$ , on peut retenir  $\varphi_x = -\pi/2$  et la fonction d'onde devient :

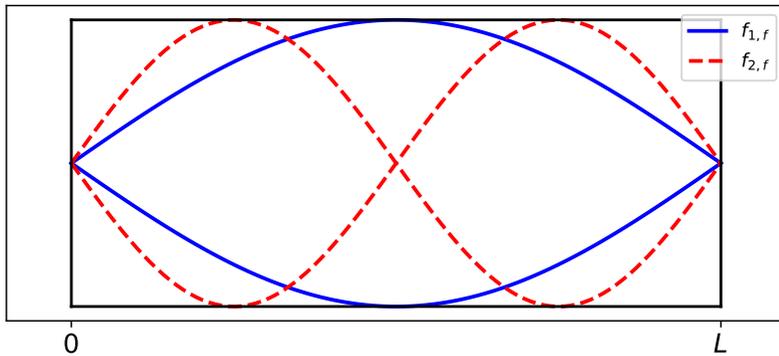
$$\Psi_f(x, t) = \psi_m \cos(\omega t + \varphi_t) \sin(k_f x)$$

La condition initiale impose  $\forall x, \Psi_f(x, 0) = 0 = \psi_m \cos(\varphi_t) \sin(k_f x)$ , on peut à nouveau retenir  $\varphi_t = -\pi/2$  et finalement (avec  $\omega = 2\pi f$ ) :

$$\forall t > 0, \forall x \in [0, L[, \Psi_f(x, t) = \psi_m \sin(2\pi f t) \sin(k_f x)$$

**2. Réponse : D.**

On peut représenter le fuseau associé à l'onde de vitesse dans cette configuration « fermée aux deux extrémités ».



On constate que dans le cas du fondamental  $\lambda_1 = 2L = \frac{c}{f_{1,f}}$ , c'est à dire :

$$f_{1,f} = \frac{c}{2L} = \frac{340}{2 \times 2,0} \Rightarrow f_{1,f} = 85 \text{ Hz}$$

**3. Réponse : B.**

On peut représenter les fuseaux des premiers harmoniques (figure ci-dessus) et identifier la formule générale :  $\lambda_n = \frac{2L}{n}$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

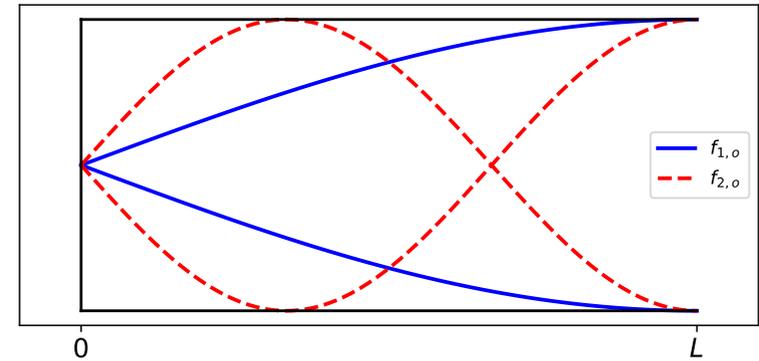
On peut tout aussi bien tenir compte de la condition aux limites :

$$\forall t > 0, \Psi_f(L, t) = 0 \Rightarrow \sin(k_f L) = 0 \Rightarrow k_{f,n} = \frac{n\pi}{L} \text{ avec } n \in \mathbb{N}^*$$

Sachant que  $k_{f,n} = \frac{2\pi}{\lambda_n}$ , on retrouve la formule proposée.

**4. Réponse : C.** La réponse à la question 1 ayant été obtenue sans considérer la condition aux limites en  $x = L$  la forme trouvée à la question 1 reste valable.

**5. Réponse : C.** Avec une condition fermé-ouvert, le faisceau associé au fondamental de vitesse a l'allure suivante :



$$\text{On en déduit } \lambda_{1,o} = 4L \Rightarrow f_{1,o} = \frac{c}{4L} = 42,5 \text{ Hz.}$$

**6. Aucune bonne réponse** Une première méthode consiste à représenter les fuseaux des premiers harmoniques (Cf. figure précédente). On observe  $\lambda_1 = 4L$ ,  $\lambda_2 = 4L/3, \dots$

$$\text{On conclut alors à : } \lambda_m = \frac{4L}{2m-1} = \frac{L}{m/2-1/4} \text{ avec } m \in \mathbb{N}^*.$$

Remarquons que la proposition C de l'énoncé avec  $m > 0$  ne permet pas d'obtenir la longueur d'onde du fondamental.

On peut également utiliser la condition aux limites en  $L$  qui impose :

$$\sin(k_o L) = \pm 1, \text{ c'est à dire :}$$

$$k_{p,o} L = \frac{\pi}{2} + p\pi \text{ avec } k_{p,o} = \frac{2\pi}{\lambda_p} \text{ avec } p \in \mathbb{N} \text{ on retrouve la même relation.}$$

# Optique géométrique

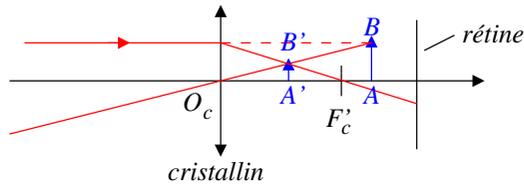
## 7. Réponses : B et C.

La limite de résolution d'un œil normal est de l'ordre de  $\theta_{lim} \approx 1' \text{ d'arc}$  et non  $\theta_{lim} \approx 1'' \text{ d'arc}$ , c'est à dire  $(1/60)^\circ$  soit environ  $\theta_{lim} = 3 \times 10^{-4} \text{ rad}$ .

Un objet de 0,20 m placé à une distance de 100 m est donc vu sous un angle  $\alpha = 2 \times 10^{-3} \text{ rad} > \theta_{lim}$ , le **ballon est donc discernable**.

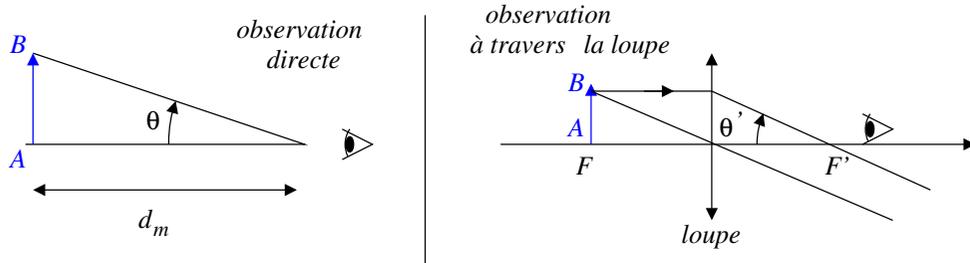
**Un œil emmétrope voit net à l'infini sans accommoder.**

Au repos l'œil emmétrope voit net à l'infini et le plan focal image est confondu avec la rétine; pour une observation à distance finie, la cristallin se courbe, la distance focale se réduit et le foyer image du cristallin se trouve en amont de la rétine; dans cette situation, l'œil fera d'un objet virtuel une image en amont de la rétine qui ne peut être vue nette comme illustré sur le schéma suivant :



## 8. Réponses : B et D.

On commence par représenter l'observation à l'œil nu et *via* la loupe :



On en déduit aux petits angles :

$$\theta = \frac{AB}{d_m} \quad \text{et} \quad \theta' = \frac{A'B'}{f'} \quad \text{donc} \quad G = \frac{d_m}{f'}$$

## 9. Réponses : B et D.

La loupe fait de l'objet  $A$  une image  $A'$  placé au *punctum proximum* de l'œil collé

contre la lentille, c'est à dire  $\overline{OA'} = -d_m$ . La formule de conjugaison de Descartes pour  $\mathcal{L}$  conduit à :

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{-d_m} - \frac{1}{p_1} \Rightarrow p_1 = \frac{-d_m f'}{d_m + f'}$$

Dans cette configuration, l'œil observe soit l'objet  $AB$  depuis une distance  $d_m$  soit son image  $A'B'$  par la lentille depuis la même distance  $d_m$ , le grossissement s'identifie au grandissement en valeur absolue dû à la lentille :

$$G = \frac{A'B'/d_m}{AB/d_m} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OA} = \frac{d_m}{d_m f' / (d_m + f')} \Rightarrow G = 1 + \frac{d_m}{f'}$$

## 10. Réponses : A et C.

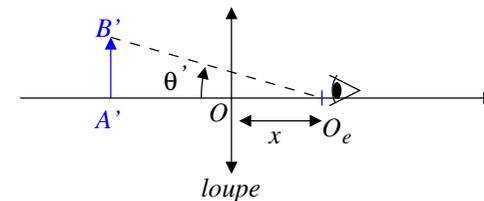
Pour que l'œil observe sans accommoder, l'image  $A'_\infty$  de  $A_\infty$  par la loupe doit se trouver à l'infini donc  $A_\infty$  se trouve nécessairement en  $F$ , c'est à dire

$$p_\infty = \overline{OA_\infty} = -f'$$

Pour l'œil qui accommode au maximum, l'image  $A'_m$  de  $A_m$  par la loupe doit se situer à une distance  $d_m$  en amont de l'œil, soit  $\overline{O_e A'_m} = -d_m$  avec  $O_e$  la position de l'œil sur l'axe optique. La formule de conjugaison de Descartes pour  $\mathcal{L}$  conduit à :

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{\overline{OA'_m}} - \frac{1}{\overline{OA_m}} = \frac{1}{\overline{OO_e} + \overline{O_e A'_m}} - \frac{1}{p_m} = \frac{1}{x - d_m} - \frac{1}{p_m} \Rightarrow p_m = -\frac{f'(d_m - x)}{f' + d_m - x}$$

## 11. Réponse : D. La situation est la suivante :



On cherche  $G = \frac{\theta'}{\theta}$  avec  $\theta = \frac{AB}{d_m}$  et  $\theta' = \frac{A'B'}{A'O + x}$  donc  $G = \frac{A'B'}{AB} \times \frac{d_m}{A'O + x}$  (1).

Posons  $p' = \overline{OA'}$ , la formule de conjugaison conduit à :

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{p'} - \frac{1}{p} \Rightarrow \overline{OA'} = p' = \frac{pf'}{p+f'} \quad (2)$$

On en déduit  $|\gamma| = \frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OA} = \left| \frac{p'}{p} \right| = \frac{f'}{p+f'}$  (3). On reporte (2) et (3) dans (1), il vient :

$$G = \frac{f'}{p+f'} \times \frac{d_m}{x - pf'/(p+f')} \Rightarrow \boxed{G(x, p) = \frac{f'd_m}{xf' + px - pf'}}$$

12. Réponse : B

Le grossissement est maximal lorsque le dénominateur  $x(f'+p) - pf'$  est minimal. On a nécessairement  $p < 0$  (l'objet observé est réel) et  $|p| < f'$  sinon la loupe formerait une image réelle de l'objet, en conséquence  $f'+p > 0$  et le dénominateur qui reste positif et minimal pour  $\boxed{x=0}$ .

Le grandissement sera alors maximal pour une image  $A'B'$  la plus proche possible de l'œil situé contre la loupe, donc  $\boxed{p' = \overline{O_e A'} = -d_m}$ .

## Régime transitoire

13. Réponse : C.

On commence par appliquer une loi des mailles quand  $K$  est ouvert :

$$E = L \frac{di}{dt} + Ri + u_C(t) = LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C \Leftrightarrow \omega_0^2 E = \omega_0^2 u_C + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_C}{dt} + \frac{d^2 u_C}{dt^2}$$

avec  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$  et  $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{R} \times \sqrt{\frac{L}{C}}$ . On en déduit :

$$R = \frac{1}{Q} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{10} \times \sqrt{\frac{50 \times 10^{-3}}{20 \times 10^{-6}}} = \frac{1}{10} \times \sqrt{\frac{5}{20}} \sqrt{\frac{10^{-2}}{10^{-6}}} = \frac{10^2}{10} \times \frac{1}{\sqrt{4}} \Rightarrow \boxed{R = 5,0 \Omega}$$

14. Réponse : A.

En considérant l'équation caractéristique on montre que la pseudo-pulsation est donnée par :  $\omega_a = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$ , avec un facteur de qualité  $Q = 10$  on peut effectuer un DL à l'ordre 1 :

$$\omega_a = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \Rightarrow \boxed{\omega_a \approx \omega_0 \left(1 - \frac{1}{8Q^2}\right)}$$

15. Réponses : B et C.

La présence de la bobine assure la continuité de l'intensité du courant. En  $t = 0^-$  le circuit étant fermé depuis « un long moment », on a atteint le régime permanent  $i = E/R$ , on en déduit  $\boxed{i(t = 0^+) = E/R}$ .

La continuité de la tension aux bornes du condensateur assure  $\boxed{u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0}$ .

16. Réponse : B.

$$u_C(t = 0^+) = 0 = A + E \Rightarrow \boxed{A = -E}$$

17. Réponse : A.

La dérivée de la tension  $u_C$  s'exprime selon :

$$\begin{aligned} \frac{du_C}{dt}(t) &= -\frac{1}{2\tau_e} e^{-t/(2\tau_e)} [-E \cos(\omega_a t) + B \sin(\omega_a t)] \\ &\quad + e^{-t/(2\tau_e)} [E\omega_a \sin(\omega_a t) + B\omega_a \cos(\omega_a t)] \end{aligned}$$

On applique le résultat en  $t = 0^+$  compte tenu de la condition initiale sur l'intensité :

$$i(0^+) = \frac{E}{R} = C \times \left( \frac{E}{2\tau_e} + B\omega_a \right) \Leftrightarrow \boxed{B = \frac{E}{\omega_a} \left( \frac{1}{RC} - \frac{1}{2\tau_e} \right)}$$

18. Réponses : A, C.

Après fermeture de l'interrupteur, on est ramené à un circuit  $RL$ , de constante de temps  $L/R$  et sachant qu'une évolution à 95% correspond à  $3\tau$  :

$$\boxed{\tau_{rt} = \frac{3L}{R}} \quad \text{et} \quad \tau_{rt} = \frac{3 \times 50 \times 10^{-3}}{5,0} \Rightarrow \boxed{\tau_{rt} \approx 30 \text{ ms}}$$

## Mécanique

19. Réponses : A, D.

Pour un mouvement à force centrale, l'énergie mécanique de la Terre et son moment cinétique sont des constantes du mouvement. À l'aphélie et au périhélie, le vecteur vitesse et le vecteur position sont orthogonaux ce qui permet un calcul élémentaire du moment cinétique, on en déduit :

$$\boxed{r_p v_p = r_a v_a} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathcal{E}_m(A_p) = \mathcal{E}_m(A_a)}$$

20. Réponse : D.

Le mouvement n'est pas circulaire, on ne peut pas appliquer la formule  $v^2 = GM_s/r$  !

On applique la conservation de l'énergie mécanique de la Terre en utilisant l'expression de cette énergie mécanique en fonction du demi-grand axe  $a = (r_a + r_p)/2$  (une autre solution, un peu plus longue, consiste à combiner les deux résultats de la question précédente) :

$$\frac{-GM_s M_T}{r_a + r_p} = \mathcal{E}_m(A_a) = -\frac{GM_s M_T}{r_a} + \frac{1}{2} M_T v_a^2 \Rightarrow \boxed{v_a = \sqrt{\frac{2GM_s r_p}{r_a(r_a + r_p)}}$$

21. Réponse : B.

On exprime la composante du moment cinétique à l'aphélie, les vecteurs position et vitesse étant perpendiculaires en ce point :

$$L_z = M_T r_a v_a = M_T r_a \sqrt{\frac{2GM_s r_p}{r_a(r_a + r_p)}} \Rightarrow \boxed{L_z = M_T \left[ \frac{2GM_s r_a r_p}{r_a + r_p} \right]^{1/2}}$$

22. Réponse : D.

Exprimons le moment cinétique de la Terre dans la base des coordonnées cylindriques  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$  :

$$\vec{L}_z = M_T r \vec{e}_r \wedge [\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi] = M_T r^2 \dot{\varphi} \vec{e}_z$$

À l'ordre 1 en  $e$  on en déduit alors :

$$\vec{L}_z = M_T \frac{p^2}{(1 + e \cos(\varphi))^2} \dot{\varphi} \vec{e}_z \Rightarrow \boxed{\frac{L_z}{M_T} \approx p^2 (1 - 2e \cos \varphi) \dot{\varphi}}$$

23. Réponse : A.

La durée de parcours de  $H$  à  $E$  correspond à un angle  $\varphi$  variant de  $-\beta$  à  $\pi - \beta$ . On intègre l'expression précédente en séparant les variables :

$$\frac{L_z}{M_T p^2} \int_0^{\tau_1} dt = \int_{-\beta}^{\pi-\beta} (1 - 2e \cos(\varphi)) d\varphi = [\varphi - 2e \sin(\varphi)]_{-\beta}^{\pi-\beta}$$

avec  $\sin(\pi - x) = \sin(x)$ , on en déduit :  $\boxed{\tau_1 \approx \frac{p^2 M_T}{L_z} (\pi - 4e \sin \beta)}$

24. Réponse : C.

Tout d'abord notons que  $\tau_2 \neq \tau_1$  et  $\tau_2 > \tau_1$ , en effet dans la phase retour, la Terre est en moyenne plus loin du Soleil et la durée retour est plus importante (Cf. loi des aires).

Remarquons que la période de révolution  $T$  peut être obtenue en considérant le résultat précédent pour  $\beta = 0$ ,  $T = 2\tau_1(\beta = 0)$  et donc :

$$\tau_2 = T - \tau_1(\beta) = 2\tau_1(\beta = 0) - \tau_1(\beta) = 2 \times \pi \frac{p^2 M_T}{L_z} - \frac{p^2 M_T}{L_z} (\pi - 4e \sin \beta)$$

Donc :  $\boxed{\tau_2 \approx \frac{p^2 M_T}{L_z} (\pi + 4e \sin \beta)}$ .

## Thermodynamique

Avant toute chose, on peut proposer (Cf. page suivante) une allure du cycle thermodynamique tournant dans le sens horaire et compatible avec un fonctionnement moteur (détente haute pression). Les échanges thermiques sont nécessairement associés aux évolutions isochores, les autres évolutions étant considérées adiabatiques et réversibles.

25. Réponse : B.

Le transfert thermique fourni par la source chaude est associé à l'évolution  $E_2 E_3$ . Pour cette **évolution isochore**, on applique entre des deux états un premier principe de la thermodynamique pour le mélange dans le cylindre :

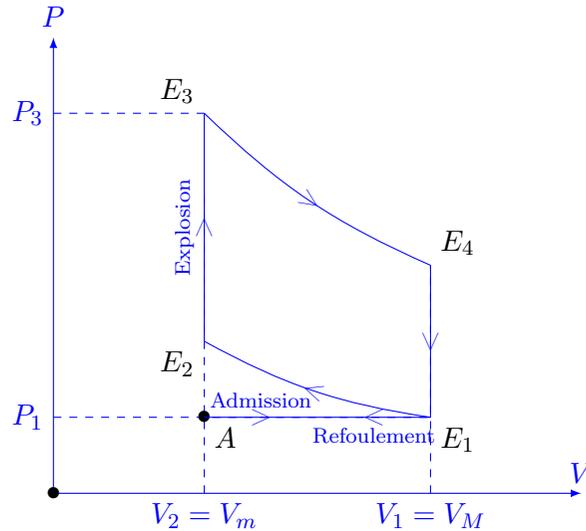
$$Q_c = Q_{23} \underset{W=0}{=} \Delta U_{23} \Rightarrow \boxed{Q_{23} = n C_{vm} (T_3 - T_2)}$$

26. Réponses : A et D.

Le transfert thermique fourni par la source froide est associé à l'évolution  $E_4 E_1$ . Pour cette **évolution isochore**, on applique entre des deux états un premier principe de la thermodynamique pour le mélange dans le cylindre :

$$Q_f = Q_{41} \underbrace{=}_{W=0} \Delta U_{41} \Rightarrow \boxed{Q_{23} = nC_{vm}(T_1 - T_4)}$$

Tracé du diagramme de CLAPEYRON complet correspondant à un moteur à quatre temps<sup>1</sup>



27. Réponse : B.

Pour un moteur, l'efficacité est le rapport de l'énergie utile  $-W$  sur l'énergie coûteuse  $Q_c = Q_{23}$ . L'application du premier principe au gaz sur un cycle conduit à :  $0 = W + Q_{23} + Q_{41}$ . On en déduit :

$$\eta = \frac{-W}{Q_{23}} = \frac{Q_{23} + Q_{41}}{Q_{23}} \Rightarrow \boxed{\eta = 1 + \frac{Q_{41}}{Q_{23}}}$$

28. Réponses : A et C.

Pour les évolutions isentropiques du gaz assimilé à un gaz parfait, on applique la loi de Laplace :  $T_1 V_M^{\gamma-1} = T_2 V_m^{\gamma-1} \Rightarrow T_2 = T_1 \times \left(\frac{V_M}{V_m}\right)^{\gamma-1}$

$$\Rightarrow T_2 = T_1 a^{\gamma-1} \Rightarrow \boxed{T_1 = T_2 a^{1-\gamma}}$$

1. Réalisé par Olivier Gras

$$T_3 V_m^{\gamma-1} = T_4 V_M^{\gamma-1} \Rightarrow \boxed{T_3 = T_4 a^{\gamma-1}}$$

29. Réponse : B.

À l'aide des expressions des échanges thermiques précédemment obtenues, on en déduit :

$$\boxed{\eta = 1 + \frac{T_1 - T_4}{T_3 - T_2}}$$

30. Réponses : A et C.

$$\eta = 1 + \frac{T_1 - T_4}{T_4 a^{\gamma-1} - T_1 a^{\gamma-1}} \Rightarrow \boxed{\eta = 1 - a^{1-\gamma}}$$

## Électromagnétisme

31. Réponse : B.

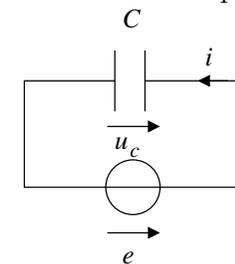
Compte tenu de l'orientation du circuit, le vecteur surface élémentaire est dirigé selon  $+\vec{e}_z$ . Partant d'une situation pour laquelle la tige est verticale et le flux vaut  $\Phi_0$ , lorsque la tige tourne d'un angle  $\theta$  elle balaie une portion de disque d'aire  $\theta \times \ell^2/2$  (en effet pour un angle de  $2\pi$ , l'aire balayée est  $\pi\ell^2 = 2\pi \times \ell^2/2$ ), ce qui donne pour la nouvelle valeur du flux magnétique :  $\Phi(\theta) = \Phi_0 - B\ell^2\theta/2$

Par application de la loi de Faraday, on en déduit :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow \boxed{e = \frac{\ell^2 B_0 \dot{\theta}}{2}}$$

32. Réponse : B.

On commence par représenter le circuit électrique équivalent :



$$u_c = e = \frac{\ell^2 B_0 \dot{\theta}}{2} \quad \underbrace{\Rightarrow}_{d/dt} \quad \boxed{\frac{i}{C} = \frac{\ell^2 B_0 \ddot{\theta}}{2}}$$

33. Réponse : D.

On commence par exprimer la force de Laplace sur la tige :

$$\vec{f}_L = \int_0^\ell i dl \vec{e}_r \wedge B_0 \vec{e}_z = -i l B_0 \vec{e}_\theta$$

La force de Laplace étant uniformément répartie le long de la tige, le moment des forces de Laplace s'applique au milieu de la tige :

$$\vec{M}_{L,O} = \frac{\ell}{2} \vec{e}_r \wedge -i l B_0 \vec{e}_\theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{M}_{L,O} = -\frac{i B_0 \ell^2}{2} \vec{e}_z}$$

34. Réponse : C.

Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, on applique, en projection selon  $\vec{e}_z$ , un théorème du moment cinétique au système {tige + masse}, le moment cinétique se limitant à celui de la masse  $m$  qui se déplace sur une portion de cercle :

$$\frac{d\sigma_{Oz}}{dt} = m\ell^2 \ddot{\theta} = \vec{M}_O \cdot \vec{e}_z = \mathcal{M}_{Oz}(\vec{P}) + \underbrace{\mathcal{M}_{Oz}(\vec{R})}_{=0} + \mathcal{M}_{Oz}(\vec{f}_L) = \underbrace{-mg\ell \sin(\theta)}_{\text{bras de levier}} - \frac{i B_0 \ell^2}{2}$$

avec  $i = \frac{C\ell^2 B_0 \ddot{\theta}}{2}$ , on en déduit :

$$\ddot{\theta} \left[ m\ell^2 + C B_0^2 \frac{\ell^4}{4} \right] = -mg\ell \sin(\theta) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega_1 = \left( \frac{g}{\ell} \right)^{1/2} \left( 1 + \frac{\ell^2 B_0^2 C}{4m} \right)^{-1/2}}$$

35. Réponse : B.

Aux petits angles,  $\ddot{\theta} + \omega_1^2 \theta = 0$ , d'après  $i = C\ell^2 B_0 \ddot{\theta}/2$ , en dérivant deux fois l'équation mécanique, on constate que  $i$  vérifie la même équation différentielle

$$\boxed{\omega_2 = \omega_1}$$

36. Réponse : B.

$$\omega_1 = \left( \frac{10}{0,40} \right)^{1/2} \times \left( 1 + \frac{0,4^2 \times 1^2 \times 1}{4 \times 10^{-2}} \right)^{-1/2} = \left( \frac{100}{4} \right)^{1/2} \times 5^{-1/2} = \sqrt{\frac{100}{20}} \approx \sqrt{5}$$

$$\boxed{\omega_1 \approx 2,3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}$$