

Calculatrice interdite

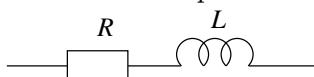
Justifier les réponses. Mettre les résultats en évidence.

Consignes et remarques :

- chaque question peut comporter : une bonne réponse, deux bonnes réponses ou aucun bonne réponse ;
- aucune pénalité n'est attribuée en cas de mauvaise réponse ;
- si le sujet se présente sous la forme d'un QCM, il est attendu sur votre copie une explication complète justifiant les réponses retenues (Cf. exemples ci-dessous) ; se contenter de proposer des réponses sans les justifier n'attribue pas de point ;
- les vecteurs sont notés en caractère gras, exemple \mathbf{e}_z pour \vec{e}_z .

Exemple question 00

On considère l'association série suivante et on note ω la pulsation.



00. L'impédance de cette association :

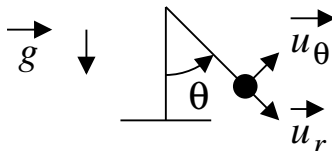
- A) vaut $\underline{Z} = R + jL\omega$
- B) a un module qui tend vers R à haute fréquence
- C) vaut $\underline{Z} = \frac{R \times jL\omega}{R + jL\omega}$
- D) a un module qui tend vers $+\infty$ à haute fréquence

Q00. Réponses A et D.

Justification : en série « les impédances s'ajoutent », en conséquence $\underline{Z} = R + jL\omega$ avec pour module $|\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2}$ qui diverge en haute fréquence (la bobine se comporte comme un circuit ouvert).

Exemple question 00 bis

On considère l'oscillation d'un pendule simple, fil de longueur $\ell = 1,0$ m de masse négligeable comportant une masse $m = 50$ g à son extrémité. On néglige les frottements et on se place dans le référentiel terrestre pour des petits angles.



00 bis. La période propre de cet oscillateur vaut :

- A) $T_0 = \sqrt{\ell/g}$
- B) $T_0 = \sqrt{g/\ell}$
- C) $T_0 \approx 1,0$ s
- D) $T_0 \approx 0,5$ s

Q00 bis. Aucune bonne réponse.

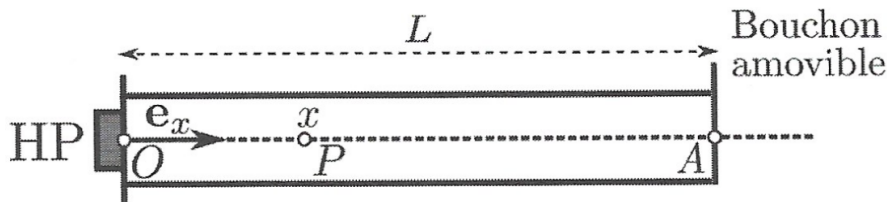
Justification : dans le référentiel terrestre supposé galiléen, on applique un principe fondamental de la dynamique à la masse m soumise à son poids et à la tension du fil. On obtient en projection selon \vec{u}_θ :

$$m\ell\ddot{\theta} = -mg \sin(\theta) \quad \xRightarrow{\theta \ll 1 \text{ rad}} \quad \ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

C'est à dire pour la période propre $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$. A.N. : $T_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{10}} \approx \frac{2\pi}{\pi} \approx 2,0$ s.

Ondes

L'air contenu dans un tuyau cylindrique, de longueur $L = OA = 2,0$ m, est excité par un haut-parleur (HP) émettant des ondes acoustiques sinusoïdales de fréquence f . Un bouchon situé en A ferme l'extrémité droite du tuyau. On note $\Psi_f(x, t)$ la fonction d'onde de l'onde acoustique dans le tuyau, x étant l'abscisse d'un point P situé à l'intérieur du tube sur l'axe (O, \mathbf{e}_x) et t , le temps. La vitesse du son dans le tuyau vaut $c_s = 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (Fig. ci-après).



Aucune connaissance spécifique sur les ondes acoustiques n'est nécessaire pour aborder cette partie. On observe que les ondes dans le tuyau se superposent pour former une onde stationnaire d'amplitude ψ_m . En présence du bouchon, elle vérifie les conditions aux limites, ainsi que la condition initiale suivantes :

$$\Psi_f(0, t) = 0 \quad , \quad \Psi_f(L, t) = 0 \quad \text{et} \quad \Psi_f(x, 0) = 0$$

1. En introduisant une constante spatiale et temporelle k_f , indiquer l'expression correcte de cette onde stationnaire :

- | | |
|------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|
| A) $\Psi_f(x, t) = \psi_m \sin(2\pi ft - k_f x)$ | C) $\Psi_f(x, t) = \psi_m \sin(2\pi ft) \sin(k_f x)$ |
| B) $\Psi_f(x, t) = \psi_m \cos(2\pi ft) \sin(k_f x)$ | D) $\Psi_f(x, t) = \psi_m \cos(2\pi ft) \cos(k_f x)$ |

2. Calculer numériquement la fréquence $f_{1,f}$ de l'harmonique fondamentale.

- | | | | |
|------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------------|------------------------------|
| A) $f_{1,f} \approx 6 \text{ mHz}$ | B) $f_{1,f} \approx 12 \text{ mHz}$ | C) $f_{1,f} = 42,5 \text{ Hz}$ | D) $f_{1,f} = 85 \text{ Hz}$ |
|------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------------|------------------------------|

3. En introduisant l'entier $n > 0$, déterminer l'expression des longueurs d'onde λ_n des ondes stationnaires qui peuvent exister dans le tuyau :

- | | | | |
|------------------------------|-------------------------------|---------------------|----------------------|
| A) $\lambda_n = \frac{L}{n}$ | B) $\lambda_n = \frac{2L}{n}$ | C) $\lambda_n = nL$ | D) $\lambda_n = 2nL$ |
|------------------------------|-------------------------------|---------------------|----------------------|

4. Le bouchon est désormais retiré. On observe alors une nouvelle onde stationnaire dans le tuyau, notée $\Psi_o(x, t)$ de même amplitude ψ_m . L'ouverture du tuyau modifie les conditions aux limites, la condition initiale restant la même :

$$\Psi_o(0, t) = 0 \quad , \quad \Psi_o(L, t) = \psi_m \sin(2\pi ft) \quad \text{et} \quad \Psi_o(x, 0) = 0$$

En introduisant une nouvelle constante spatiale et temporelle k_o , déterminer l'expression de $\Psi_o(x, t)$

- | | |
|------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|
| A) $\Psi_o(x, t) = \psi_m \sin(2\pi ft + k_o x)$ | C) $\Psi_o(x, t) = \psi_m \sin(2\pi ft) \sin(k_o x)$ |
| B) $\Psi_o(x, t) = \psi_m \cos(2\pi ft) \sin(k_o x)$ | D) $\Psi_o(x, t) = \psi_m \sin(2\pi ft) \cos(k_o x)$ |

5. Calculer numériquement la fréquence $f_{1,o}$ de l'harmonique fondamentale.

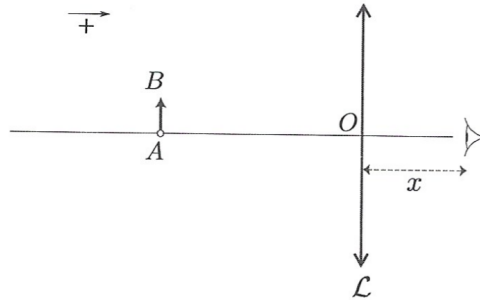
- | | | | |
|------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------------|------------------------------|
| A) $f_{1,o} \approx 6 \text{ mHz}$ | B) $f_{1,o} \approx 12 \text{ mHz}$ | C) $f_{1,o} = 42,5 \text{ Hz}$ | D) $f_{1,o} = 85 \text{ Hz}$ |
|------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------------|------------------------------|

6. En introduisant l'entier $m > 0$, déterminer l'expression des longueurs d'ondes λ_m des ondes stationnaires qui peuvent exister dans le tuyau :

- | | | | |
|-------------------------------|------------------------------|--------------------------------------|------------------------------------|
| A) $\lambda_m = \frac{L}{2m}$ | B) $\lambda_m = \frac{L}{m}$ | C) $\lambda_m = \frac{L}{m/2 + 1/4}$ | D) $\lambda_m = \frac{L}{m + 1/2}$ |
|-------------------------------|------------------------------|--------------------------------------|------------------------------------|

Optique géométrique

Une loupe, assimilée à une lentille mince \mathcal{L} de distance focale image $f' > 0$ et de centre optique O , est utilisée pour observer un objet AB situé dans un plan de front. L'ensemble est placé dans l'air dont on supposera l'indice de réfraction égal à l'unité. L'œil de l'observateur est situé à une distance $x > 0$ en arrière de la lentille (Fig. ci-après). On modélise cet œil, que l'on suppose sans défaut (œil emmétrope), comme l'association d'une lentille mince \mathcal{L}' de vergence variable et d'un capteur fixe (la rétine). On note la distance entre l'œil et son *punctum proximum*, c'est-à-dire, la distance minimale de vision nette : $d_m = 25$ cm. Dans tout l'exercice, on admet que les conditions de Gauss sont satisfaites.



On définit le grossissement G de la loupe par le rapport θ'/θ de l'angle θ' sous lequel l'objet est vu à travers \mathcal{L} sur l'angle θ sous lequel on voit l'objet directement (sans la loupe) lorsqu'il est placé au *punctum proximum*. Dans cette définition, la valeur de G dépend de la position de l'objet et de la position de l'œil. On cherche les conditions d'observation qui maximisent le grossissement.

On donne la relation de conjugaison de Descartes, celle de Newton et le grandissement transversal G_t pour une lentille mince de distance focale image f_i

$$-\frac{1}{p_o} + \frac{1}{p_i} = \frac{1}{f_i} \quad \sigma_o \sigma_i = -f_i^2 \quad G_t = \frac{p_i}{p_o} = -\frac{\sigma_i}{f_i}$$

où p_o et p_i sont respectivement les distances algébriques de l'objet et de son image au centre de la lentille. En outre, σ_o et σ_i sont les distances algébriques respectives de l'objet au foyer principal objet et de l'image au foyer principal image.

7. Que peut-on affirmer ?

- A) La limite de résolution angulaire d'un œil normal est d'environ $1,5''$.
- B) Un ballon sphérique de 20 cm de diamètre placé à une distance de 100 m est vu sous un angle supérieur à la limite de résolution angulaire d'un œil sans défaut.
- C) Un œil emmétrope peut observer nettement un objet à l'infini.
- D) Un objet virtuel pour l'œil peut être observé nettement.

8. Dans cette question, AB est placé dans le plan focal objet de \mathcal{L} et la position de l'œil, derrière la lentille, est quelconque. L'œil voit nettement l'image de AB à travers \mathcal{L} . Déterminer θ' et G .

A) $\theta' = \frac{AB}{d_m}$ B) $\theta' = \frac{AB}{f'}$ C) $G = \frac{f'}{d_m}$ D) $G = \frac{d_m}{f'}$

9. L'objet AB n'est plus dans le plan focal de \mathcal{L} . L'œil est placé à proximité de la loupe ($x \approx 0$) et accommode de sorte qu'il observe l'image de l'objet à travers \mathcal{L} à son *punctum proximum*. À quelle position $p_1 = \overline{OA}$ l'objet est-il placé et que vaut alors le grossissement G_1 de la loupe dans ces conditions d'observation ?

A) $p_1 = \frac{d_m f'}{d_m - f'}$ B) $p_1 = -\frac{d_m f'}{d_m + f'}$ C) $G_1 = \frac{d_m}{f'}$ D) $G_1 = 1 + \frac{d_m}{f'}$

10. L'œil est désormais placé à une position quelconque dans l'intervalle $0 < x \leq d_m$. On note A_∞ la position de A qui permet à l'œil d'observer l'image de l'objet donnée par \mathcal{L} sans accommodation et A_m la position de A qui oblige l'œil à accommoder au *punctum proximum*. On introduit les distances algébriques $p_\infty = \overline{OA_\infty}$ et $p_m = \overline{OA_m}$. Exprimer ces dernières.

A) $p_\infty = -f'$ B) $p_\infty = x - f$ C) $p_m = -\frac{f'(d_m - x)}{f' + d_m - x}$ D) $p_m = \frac{f'(x - d_m)}{f' + x - d_m}$

11. On note $p = \overline{OA}$ la position de A telle que $p_\infty \leq p \leq p_m$. Calculer le grossissement $G(x, p)$ de la loupe pour ces positions x de l'œil et p de l'objet.

A) $G(x, p) = \frac{f'd_m}{(x-p)(f'+p)}$

C) $G(x, p) = \frac{f'd_m}{xf' + px + pf'}$

B) $G(x, p) = \frac{f'd_m}{(x-p)(f'-p)}$

D) $G(x, p) = \frac{f'd_m}{xf' + px - pf'}$

12. On note A' l'image de A par \mathcal{L} et $p' = \overline{OA'}$. Pour quelle position x de l'œil et quelle valeur de p' le grossissement est-il maximal ?

A) $x = d_m$ et $p' = 0$

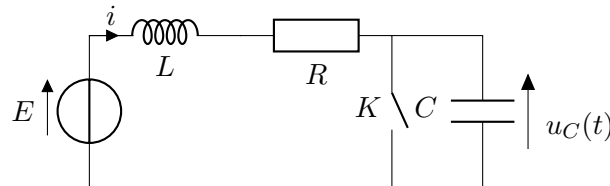
C) x quelconque et $p' = -\infty$

B) $x = 0$ et $p' = -d_m$

D) $x = 0$ et $p' = -f'$

Régime transitoire

Le condensateur d'un circuit RLC série, de capacité $C = 20 \mu\text{F}$, est mis en court-circuit par un interrupteur K depuis une durée suffisamment longue pour que le régime soit établi (permanent). Le circuit est alimenté par une source de tension stationnaire idéale de force électromotrice E . On ouvre K à un instant pris comme origine temporelle. La bobine du circuit possède une inductance $L = 50 \text{ mH}$. On note R la résistance du résistor, i l'intensité du courant électrique qui traverse la bobine, et u_C , la tension aux bornes du condensateur (Fig. ci-après).



Lorsque K est ouvert, le facteur de qualité du circuit vaut $Q = 10$. On note ω_0 la pulsation propre du circuit. On rappelle que ω_0 et Q peuvent être identifiés à l'aide de l'équation homogène de l'oscillateur amorti du type $\ddot{y} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{y} + \omega_0^2 y = 0$.

13. Calculer numériquement R :

A) $R = 0,002 \Omega$

B) $R = 0,2 \Omega$

C) $R = 5 \Omega$

D) $R = 500 \Omega$

14. Que peut-on dire de la pseudo-pulsation ω_a ?

A) $\omega_a \approx \omega_0 \left(1 - \frac{1}{8Q^2}\right)$

C) $\omega_a = \omega_0 \left(1 + \frac{1}{4Q^2}\right)^{1/2}$

B) $\omega_a \approx \frac{\omega_0}{Q}$

D) $\omega_a \approx Q\omega_0$

15. Que valent l'intensité $i(0^+)$ et la tension $u_C(0^+)$ à l'instant $t = 0^+$ succédant immédiatement à l'ouverture de K ?

A) $i(0^+) = 0$

B) $i(0^+) = \frac{E}{R}$

C) $u_C(0^+) = 0$

D) $u_C(0^+) = E$

16. La tension aux bornes du condensateur évolue selon :

$$u_C(t) = \exp\left(-\frac{t}{2\tau_e}\right) [A \cos(\omega_a t) + B \sin(\omega_a t)] + E$$

A, B et τ_e étant des constantes temporelles. Exprimer A :

A) $A = E$

B) $A = -E$

C) $A = 0$

D) $A = \frac{E}{2}$

17. Exprimer B :

A) $B = \frac{E}{\omega_a} \left(\frac{1}{RC} - \frac{1}{2\tau_e}\right)$

C) $B = \frac{E}{RC\omega_a}$

B) $B = 0$

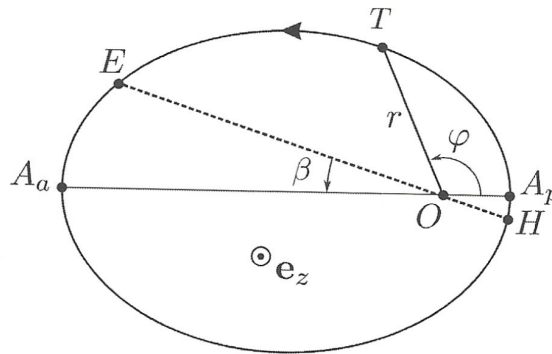
D) $B = \frac{E}{2\omega_a\tau_e}$

18. On attend suffisamment longtemps que le régime s'établisse puis, à un instant pris comme nouvelle origine temporelle, on ferme K . On retiendra, par convention, comme durée du régime transitoire, la durée nécessaire pour que i atteignent 95% de sa valeur finale (on indique que $\ln(20) \approx 3$). Déterminer la durée τ_{rt} du régime transitoire succédant à la fermeture de K

- A) $\tau_{rt} \approx \frac{3L}{R}$ B) $\tau_{rt} \approx 3RC$ C) $\tau_{rt} \approx 30ms$ D) $\tau_{rt} \approx 300\mu s$

Mécanique

La Terre, assimilée à un corpuscule T de masse M_T , possède une orbite elliptique dans le référentiel héliocentrique. Ce dernier, supposé galiléen, est centré sur le Soleil de masse M_S , placé en O . On note A_p et A_a les positions orbitales extrêmes de T : le périhélie A_p et l'aphélie A_a . On repère la position de T à l'aide du système de coordonnées polaires de centre O : $r = OT$ et $\varphi = \widehat{A_pOT}$. Les angles sont orientés dans le sens de parcours de la trajectoire, le vecteur \mathbf{e}_z étant orthogonal au plan orbital (Fig. ci-après).



On pose $r_p = OA_p$ et $r_a = OA_a$ et on note G la constante de Newton (dite de gravitation universelle). On introduit v_p et v_a les vitesses de T respectivement en A_p et A_a . Sur la figure précédente, on a représenté la position H occupée par la Terre au début de l'hiver (solstice d'hiver), ainsi que la position E occupée par la Terre au début de l'été (solstice d'été) à l'aide de l'angle $\beta = \widehat{EOA_a} = \widehat{HOA_p} \approx 12,2^\circ$

L'origine (ou référence) de l'énergie potentielle gravitationnelle est prise à l'infini et on note \mathcal{E}_m l'énergie mécanique de T dans le référentiel héliocentrique. On note \mathbf{L}_O le moment cinétique de T en O et on introduit $L_z = \mathbf{L}_O \cdot \mathbf{e}_z$

19. Que peut-on affirmer ?

- A) $r_p v_p = r_a v_a$ B) $r_p^2 v_p = r_a^2 v_a$ C) $\mathcal{E}_m(A_p) \neq \mathcal{E}_m(A_a)$ D) $\mathcal{E}_m(A_p) = \mathcal{E}_m(A_a)$

20. Exprimer v_a

- A) $v_a = \left(\frac{GM_S}{r_a}\right)^{1/2}$ B) $v_a = \left(\frac{GM_T}{r_a + r_p}\right)^{1/2}$ C) $v_a = \left(\frac{2GM_S r_a}{r_p}\right)^{1/2}$ D) $v_a = \left[\frac{2GM_S r_p}{r_a(r_a + r_p)}\right]^{1/2}$

21. Exprimer L_z

- A) $L_z = M_T \left[\frac{GM_S(r_a + r_p)}{2}\right]^{1/2}$ C) $L_z = M_T \left(\frac{GM_S r_a r_p}{r_a + r_p}\right)^{1/2}$
 B) $L_z = M_T \left[\frac{2GM_S r_a r_p}{r_a + r_p}\right]^{1/2}$ D) $L_z = M_T [2GM_S(r_a + r_p)]^{1/2}$

22. L'équation polaire de la trajectoire de la Terre est la suivante :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}$$

où e et p sont deux constantes temporelles indépendantes de r et φ . Sachant que $e \ll 1$, que peut-on affirmer ?

- A) $\frac{L_z}{M_T} \approx p^2(1 + e \cos \varphi)\dot{\varphi}$ C) $\frac{L_z}{M_T} \approx p^2(1 + 2e \cos \varphi)\dot{\varphi}$

$$\text{B) } \frac{L_z}{M_T} \approx p^2(1 - e \cos \varphi) \dot{\varphi}$$

$$\text{D) } \frac{L_z}{M_T} \approx p^2(1 - 2e \cos \varphi) \dot{\varphi}$$

23. On rappelle l'égalité suivante, dans laquelle $g'(\varphi)$ désigne la dérivée d'une fonction $g(\varphi)$ par rapport à φ :

$$g'(\varphi) \dot{\varphi} = \frac{d}{dt}[g(\varphi)]$$

ainsi que la relation :

$$\int_0^{\tau_1} dt = \tau_1$$

En déduire la durée τ_1 nécessaire pour que T passe de H à E , c'est-à-dire, la durée qui s'écoule entre le solstice d'hiver et le solstice d'été.

$$\text{A) } \tau_1 \approx \frac{p^2 M_T}{L_z} (\pi - 4e \sin \beta)$$

$$\text{C) } \tau_1 \approx \frac{p^2 M_T}{L_z} (\pi + 4e \sin \beta)$$

$$\text{B) } \tau_1 \approx \frac{p^2 M_T}{L_z} (\pi - 2e \sin \beta)$$

$$\text{D) } \tau_1 \approx \frac{p^2 M_T}{L_z} (\pi + 2e \sin \beta)$$

24. De même, exprimer la durée τ_2 nécessaire pour que T passe de E à H , c'est-à-dire, la durée qui s'écoule entre le solstice d'été et le solstice d'hiver.

$$\text{A) } \tau_2 \approx \frac{p^2 M_T}{L_z} (\pi - 4e \sin \beta)$$

$$\text{C) } \tau_2 \approx \frac{p^2 M_T}{L_z} (\pi + 4e \sin \beta)$$

$$\text{B) } \tau_2 \approx \frac{p^2 M_T}{L_z} (\pi - 2e \sin \beta)$$

$$\text{D) } \tau_2 \approx \frac{p^2 M_T}{L_z} (\pi + 2e \sin \beta)$$

Thermodynamique

Un moteur thermique à air fonctionne en cycle fermé au cours duquel n moles d'air, assimilées à un gaz parfait, subissent entre quatre états E_1, E_2, E_3 et E_4 les transformations réversibles suivantes :

$E_1 \rightarrow E_2$ une compression isentropique

$E_2 \rightarrow E_3$ une compression isochore

$E_3 \rightarrow E_4$ une détente isentropique

$E_4 \rightarrow E_1$ une détente isochore.

On désigne par p_k, V_k et T_k les pressions, volumes et températures des états E_k , où $k = 1, 2, 3$ ou 4 . On pose $V_M = V_1 = V_4$ et $V_m = V_2 = V_3$ et on introduit le facteur de compression $a = V_M/V_m$

On note R la constante des gaz parfaits et $\gamma = C_{pm}/C_{vm}$, le rapport de la capacité thermique molaire à pression constante sur la capacité thermique molaire à volume constant. On note respectivement Q et W la chaleur (transfert thermique) et le travail (transfert mécanique) algébriquement reçu par le gaz au cours d'un cycle et Q_{ij} et W_{ij} respectivement la chaleur et le travail algébriquement reçu par le gaz lors de la transformation menant de l'état E_i à l'état E_j

25. On note Q_c la chaleur échangée avec la source chaude. Que peut-on affirmer ?

$$\text{A) } Q_c = Q_{41}$$

$$\text{C) } Q_c = nC_{pm} (T_3 - T_2)$$

$$\text{B) } Q_c = Q_{23}$$

$$\text{D) } Q_c = nC_{vm} (T_4 - T_1)$$

26. On note Q_f la chaleur échangée avec la source froide. Que peut-on affirmer ?

$$\text{A) } Q_f = Q_{41}$$

$$\text{C) } Q_f = nC_{pm} (T_3 - T_2)$$

$$\text{B) } Q_f = Q_{23}$$

$$\text{D) } Q_f = nC_{vm} (T_1 - T_4)$$

27. Exprimer l'efficacité η de cette machine, rapport du transfert d'énergie utile, compte tenu de sa vocation, sur le transfert d'énergie nécessaire pour la faire fonctionner :

$$\text{A) } \eta = \frac{Q_{23}}{Q_{23} + Q_{41}}$$

$$\text{B) } \eta = 1 + \frac{Q_{41}}{Q_{23}}$$

$$\text{C) } \eta = 1 - \frac{Q_{41}}{Q_{23}}$$

$$\text{D) } \eta = \frac{Q_{23}}{Q_{23} - Q_{41}}$$

28. Déterminer les températures T_1 et T_3 en fonction des températures T_2 et T_4 .

$$\text{A) } T_1 = T_2 a^{1-\gamma}$$

$$\text{B) } T_1 = T_2$$

$$\text{C) } T_3 = T_4 a^{\gamma-1}$$

$$\text{D) } T_3 = T_4$$

29. Exprimer η en fonction des températures T_k

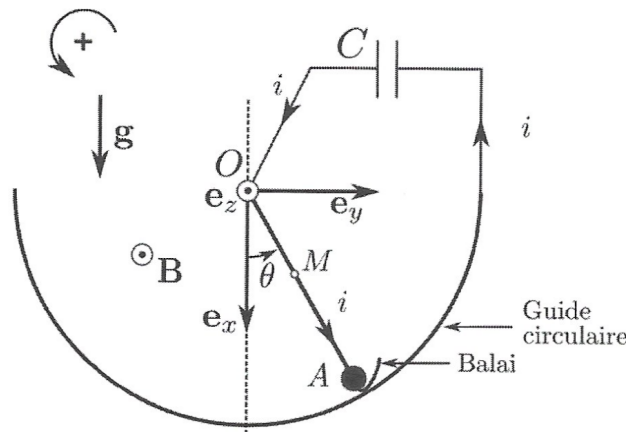
A) $\eta = 1 + \frac{T_1 - T_4}{\gamma(T_3 - T_2)}$ B) $\eta = 1 + \frac{T_1 - T_4}{T_3 - T_2}$ C) $\eta = 1 + \frac{\gamma(T_1 - T_4)}{T_3 - T_2}$ D) $\eta = \frac{T_3 - T_2}{T_1 - T_4 + T_3 - T_2}$

30. L'efficacité η peut-elle s'exprimer en fonction seulement de a et γ , et si oui, quelle est sa valeur ?

A) Oui B) Non C) $\eta = 1 - a^{1-\gamma}$ D) $\eta = 1 + a^{-\gamma}$

Électromagnétisme

Le référentiel du laboratoire est muni d'un repère cartésien $(O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ où $O\mathbf{e}_x$ désigne la verticale descendante. On réalise un pendule simple en suspendant une masselotte A de masse $m = 10$ g, à une tige conductrice rigide de masse négligeable devant m et de longueur $\ell = OA = 40$ cm. La dimension de la masselotte est négligeable devant ℓ . La liaison pivot du pendule, en O , est supposée parfaite (sans frottement) et permet au pendule d'osciller dans le plan $(O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$. La position de la tige est repérée par l'angle θ , orienté dans le sens direct, qu'elle forme avec la verticale descendante. La continuité du circuit est assurée par un balai mettant la tige en contact en A avec un guide circulaire conducteur, lui-même relié à un condensateur de capacité $C = 1,0$ F. On néglige toute résistance électrique dans le circuit, ce dernier étant fermé en O . On note $i(t)$ l'intensité qui circule dans le circuit orienté comme indiqué sur la figure ci-après.



Le balai glisse sans frotter sur le guide. Ce pendule est placé dans un champ magnétique uniforme et stationnaire $\mathbf{B} = B_0\mathbf{e}_z$ où $B_0 = 1,0$ T. On note $\mathbf{g} = g\mathbf{e}_x$ le champ de pesanteur terrestre, d'intensité $g \approx 10$ m·s⁻². Le pendule, initialement immobile et formant un angle $\theta_0 > 0$ avec la verticale, est abandonné sans vitesse à l'instant $t = 0$, le condensateur étant déchargé.

31. On note Φ le flux du champ magnétique à travers le circuit et Φ_0 sa valeur particulière lorsque $\theta = 0$. En exprimant Φ en fonction notamment de Φ_0 , déterminer à l'aide de la loi de Faraday la force électromotrice e induite dans le circuit lors du mouvement du pendule.

A) $e = -\frac{\ell^2 B_0}{2} \dot{\theta}$ B) $e = \frac{\ell^2 B_0}{2} \dot{\theta}$ C) $e = \ell^2 B_0 \dot{\theta}$ D) $e = \frac{\ell^2 B_0}{4} \dot{\theta}$

32. Établir l'expression de l'intensité du courant électrique.

A) $i = \frac{\ell^2 C B_0}{2} \dot{\theta}$ B) $i = \frac{\ell^2 C B_0}{2} \ddot{\theta}$ C) $i = \ell^2 C B_0 \dot{\theta}$ D) $i = -\ell^2 C B_0 \ddot{\theta}$

33. Exprimer le moment $\mathbf{M}_{L,O}$ en O des forces de Laplace qui s'exercent sur la tige.

A) $\mathbf{M}_{L,O} = -iB_0\ell^2\mathbf{e}_z$ B) $\mathbf{M}_{L,O} = -\frac{iB_0\ell^2}{4}\mathbf{e}_z$ C) $\mathbf{M}_{L,O} = \frac{iB_0\ell^2}{2}\mathbf{e}_z$ D) $\mathbf{M}_{L,O} = -\frac{iB_0\ell^2}{2}\mathbf{e}_z$

34. L'équation du mouvement se met sous la forme suivante :

$$\ddot{\theta} + \omega_1^2 \sin \theta = 0$$

où ω_1 est une constante temporelle. Déterminer ω_1

A) $\omega_1 = \left(\frac{g}{\ell}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{\ell^2 B_0^2 C}{2m}\right)^{-1/2}$

C) $\omega_1 = \left(\frac{g}{\ell}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{\ell^2 B_0^2 C}{4m}\right)^{-1/2}$

B) $\omega_1 = \left(\frac{g}{\ell}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{\ell^2 B_0^2 C}{4m}\right)^{-1/2}$

D) $\omega_1 = \left(\frac{g}{\ell}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{2\ell^2 B_0^2 C}{m}\right)^{-1/2}$

35. On suppose $\theta_0 \ll 1$ rad. L'intensité du courant électrique obéit à l'équation suivante :

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \omega_2^2 i = 0$$

où ω_2 est une constante temporelle. Déterminer ω_2

A) $\omega_2 = 0$

B) $\omega_2 = \omega_1$

C) $\omega_2 = 2\omega_1$

D) $\omega_2 = \frac{\omega_1}{2}$

36. Calculer numériquement ω_1

A) $\omega_1 \approx 1,0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

B) $\omega_1 \approx 2,3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

C) $\omega_1 \approx 5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

D) $\omega_1 \approx 12 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

Fin de l'énoncé