

## Devoir surveillé n°01 (Samedi 8 septembre; 4 h)

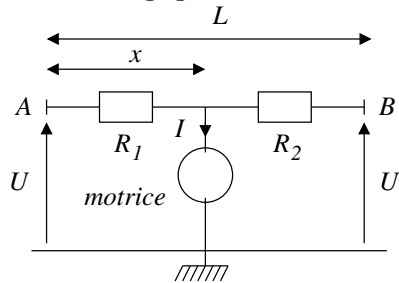
Calculatrice autorisée. Justifier les réponses.

Mettre en évidence les résultats. Séparer les exercices.

### 1 Pertes le long d'une caténaire

Le train est un moyen de transport en commun très fiable et il n'existe pas, de nos jours, de moyen plus efficace pour alimenter électriquement les trains que le captage de courant *via* le contact pantographe/caténaire. La caténaire forme la partie aller du circuit électrique depuis la sous-station d'alimentation, tandis que les rails sont le circuit retour.

Nous étudions ici l'alimentation de la motrice par caténaire depuis des sous-stations  $A$  et  $B$  distantes de  $L = 10$  km l'une de l'autre. La tension de ces sous-stations par rapport à la terre est de  $U = 1,5 \times 10^3$  V continu. La motrice se situe à une distance  $x$  de la station  $A$ . La résistance linéique des caténaires est de  $r = 0,020 \Omega \cdot \text{km}^{-1}$ . Pendant la phase d'accélération, le courant absorbé par la motrice est  $I = 2,5 \times 10^3$  A. On néglige les résistances des rails.



Les deux résistances  $R_1$  et  $R_2$  dépendent de  $x$ . Compte tenu de la configuration du circuit, elles peuvent être remplacées par une seule résistance équivalente  $R_e$ .

1. Donner le schéma électrique équivalent. En déduire l'expression de  $R_e$  en fonction de  $r$ ,  $L$  et  $x$ .
2. Déterminer la valeur de  $x$  pour laquelle la résistance  $R_e$  est maximale.

Pour la suite, on considérera que la motrice se situe en  $x = L/2$ .

3. Déterminer l'expression de  $R_e$ . Faire l'application numérique.
4. En déduire l'expression de la chute de tension  $U_R$  aux bornes de cette résistance.

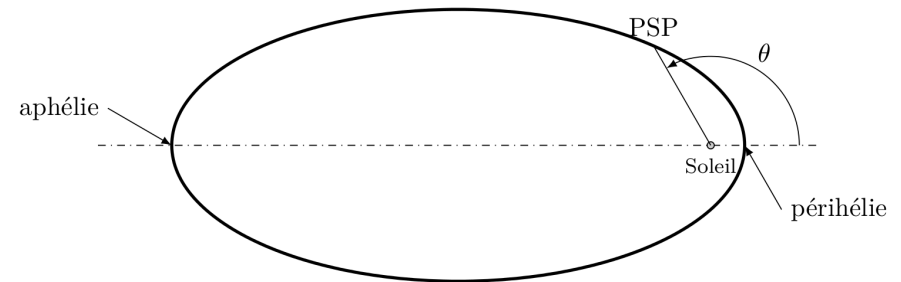
Faire l'application numérique.

5. Donner l'expression du rendement lié à l'alimentation de la motrice via la caténaire. Faire l'application numérique. Que devient ce rendement lorsque la motrice est au niveau d'une sous-station (en  $A$  ou  $B$ ) ?

### 2 La mission Parker Solar Probe

La sonde Parker Solar Probe (PSP), dont le lancement est prévu en 2018, va s'approcher à une distance  $r_p = 9,6R_s$  du centre du Soleil. La sonde est munie d'un bouclier thermique testé pour résister à une température de 1400 K.

La réalisation des objectifs scientifiques de la mission dépend de la durée passée par la sonde en-deçà de la distance  $r_{10} = 10R_s$  au centre du Soleil. On rappelle que la Terre décrit une trajectoire quasi-circulaire autour du Soleil, de rayon  $r_T = 1,0$  u.a. (unité astronomique,  $1 \text{ u.a.} \simeq 1,5 \times 10^{11}$  m).



Données : rayon du Soleil  $R_s = 6,96 \times 10^8$  m, masse du Soleil  $M_s = 1,99 \times 10^{30}$  kg, constante de gravitation  $G = 6,674 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ .

1. Pour un mouvement circulaire, démontrer la troisième loi de Kepler.
2. L'orbite finale de PSP autour du Soleil est une ellipse de distance au périhélie  $r_p = 4,6 \times 10^{-2}$  u.a. et de distance à l'aphélie  $r_a = 0,73$  u.a.. En déduire la période de révolution, en jours, de la sonde.
3. Déterminer l'expression de la vitesse  $v_p$  de la sonde à son périhélie. Application numérique.

Dans le plan de l'orbite de la sonde, on note  $\theta$  l'angle entre le grand axe de l'orbite et le rayon joignant le centre du Soleil et la sonde (Cf. figure). L'équation polaire de la trajectoire elliptique s'écrit alors  $r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos(\theta)}$ .

4. Exprimer  $e$  et  $p$  en fonction de  $r_a$  et  $r_p$ . Calculer leurs valeurs numériques.
5. Évaluer la durée passée, pendant une révolution, à  $r \leq r_{10} = 10R_s$ .

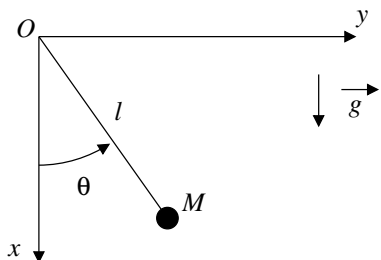
### 3 Pendules et mesures du champ de pesanteur

Certaines questions peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par un trait ondulé en marge. Il est alors demandé d'explicitier clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions.

Pour déterminer le champ de pesanteur localement, les géophysiciens disposent d'instruments appelés gravimètres. Le premier gravimètre utilisé historiquement a été un pendule. Les géophysiciens utilisent comme unité de mesure du champ de pesanteur le gal avec  $1 \text{ gal} = 1,00 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2}$ .

#### 3.1 Le pendule de Richter

Pour cette partie, on considère un pendule simple tel que représenté sous la figure ci-dessous.



1. Démontrer la relation liant la période d'oscillation  $T$  au champ de pesanteur terrestre  $g$  pour un pendule simple aux petits angles.
2. En 1672 l'astronome Richter part à Cayenne en Guyane avec une horloge à pendule réglée à Paris (pendule qui bat la seconde).

Il s'aperçoit qu'elle retarde de 2 min 28 s par jour. En déduire la valeur de  $g$  à Cayenne (à Paris  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ).

3. On admet que l'incertitude de mesure provient essentiellement de la mesure de la période  $T$ .

Quelle devrait être l'incertitude sur la mesure de la période du pendule utilisé par Richter pour que l'incertitude sur la mesure de  $g$  soit égale à  $1 \mu\text{gal}$  (ordre de grandeur de la précision des gravimètres actuels) ?

#### 3.2 Gravimètre à fléau de LaCoste et Romberg

Le gravimètre de LaCoste et Romberg est un gravimètre qui permet de mesurer l'intensité du champ de pesanteur avec une incertitude typique de  $1 \mu\text{gal}$ .

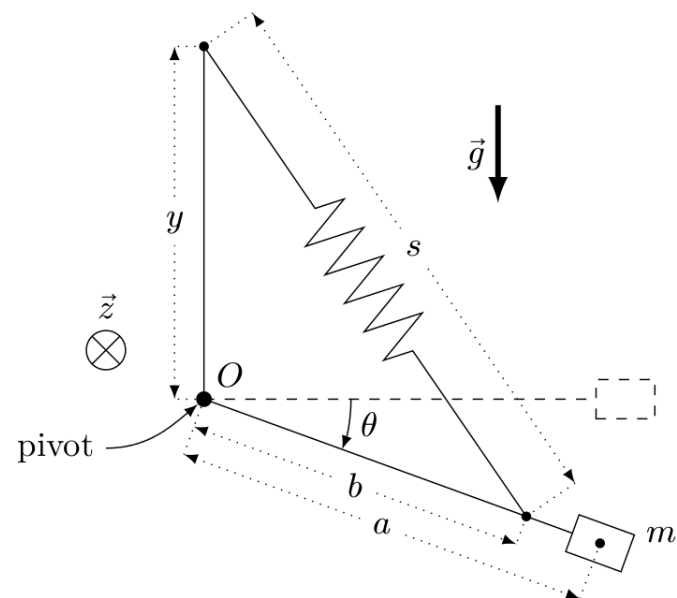


Figure 4

Une tige de longueur  $a$ , de masse négligeable porte une masse  $m$  à l'une de ses extrémités et pivote sans frottement autour de l'axe  $Oz$  (Cf. figure 4). Le mouvement de la masse est repéré par l'angle  $\theta$ , orienté par rapport à l'axe  $(Oz)$ , il est donc positif sur la figure 4. La tige est retenue par un ressort de constante de raideur  $k$ , de longueur  $s$  et de longueur au repos  $s_0$ . Ce ressort est fixé sur la tige à la distance  $b$  du point pivot. La longueur  $y$  peut être ajustée. Le dispositif est contenu dans un plan vertical, l'axe  $Oz$  est perpendiculaire à ce plan.

1. Expliquer le fonctionnement du gravimètre.
2. Pour le système gravimètre (tige + ressort + masse  $m$ ), écrire l'expression de l'énergie potentielle totale  $E_p$  (pesanteur et élastique) du système en fonction de  $m$ ,  $g$ ,  $k$ ,  $a$ ,  $\theta$ ,  $s$  et  $s_0$ .
3. Donner l'expression de  $s$  en fonction de  $y$ ,  $b$  et  $\theta$ .

Pour un mouvement de rotation pure le couple résultant  $\Gamma$  agissant sur la tige s'écrit  $\Gamma = -\frac{\partial E_p}{\partial \theta}$ .

4. Montrer que

$$\Gamma = \left( mga - kyb + \frac{kybs_0}{\sqrt{y^2 + b^2 + 2yb \sin(\theta)}} \right) \cos(\theta)$$

5. Ce ressort a été fabriqué de telle manière que sa longueur au repos  $s_0$  soit nulle. Montrer que l'on peut déterminer la valeur de l'intensité de la pesanteur  $g$  en annulant ce couple.

**Pour toute la suite, le ressort a une longueur au repos nulle.** Dans la pratique, on incline le point de support du ressort d'un petit angle  $\phi$  (figure 5).

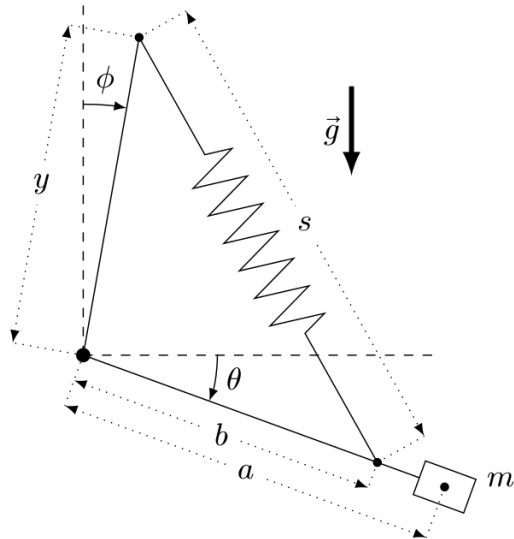


Figure 5

6. Exprimer  $s$ , puis l'énergie potentielle  $E'_p$ , en fonction de  $y$ ,  $b$ ,  $\Phi$  et  $\theta$ .

Les courbes de la figure 6 (ci-contre) représentent l'énergie potentielle en fonction de  $\theta$  du système sans et avec inclinaison du ressort (pour une meilleure visualisation, les valeurs des paramètres utilisés pour tracer ces courbes sont différentes de celles du système réel).

7. Quel est l'intérêt d'avoir incliné le ressort ?

8. Dans le cas où le point de support du ressort est incliné (figure 5), déterminer le nouveau couple  $\Gamma'$  résultant. Montrer qu'il s'écrit

$$\Gamma' = [mga - kyb \cos(\phi)] \cos(\theta) - kyb \sin(\phi) \sin(\theta)$$

Dans la pratique, l'angle  $\theta$  reste petit.

9. Écrire l'équation différentielle vérifiée par  $\theta$ . On notera  $J$  le moment d'inertie de la tige et de la masse par rapport à l'axe  $Oz$ .

10. Déterminer la pulsation propre des oscillations et la position moyenne  $\theta_0$ .

On ajuste la longueur  $y$  de manière à annuler la position moyenne pour  $g = g_0$ .

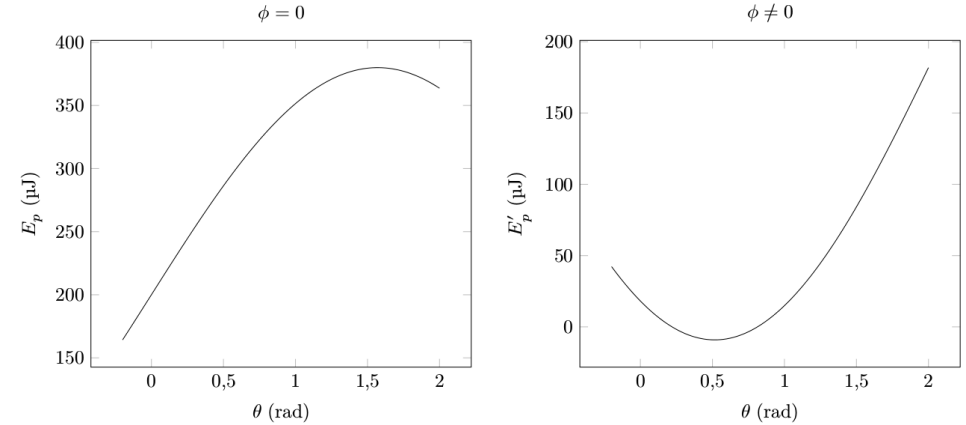


Figure 6

11. *Application numérique.* De quel angle  $\phi$  doit-on incliner l'instrument pour obtenir des oscillations de période 20 s si  $g_0 \simeq 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ,  $a \simeq b = 1,0 \text{ cm}$  et  $J = ma^2$  ?

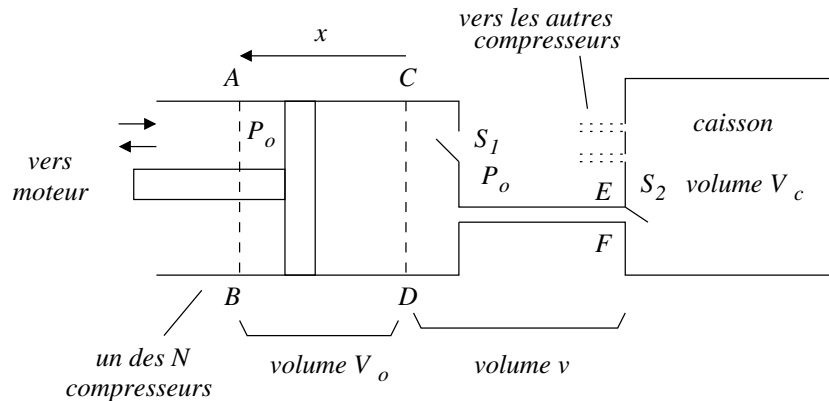
12. L'appareil est ensuite déplacé dans une zone où  $g = g_0 + \Delta g$ . Montrer que la nouvelle position moyenne  $\theta'_0$  est égale à  $\theta'_0 = \frac{\Delta g}{g_0 \tan(\phi)}$

13. Si le champ de pesanteur varie de  $10 \mu\text{gal}$ , quel est l'ordre de grandeur de la nouvelle position moyenne ? Commenter.

## 4 Compression de l'air dans un caisson

On cherche à injecter de l'air dans un caisson à l'aide de  $N = 10$  compresseurs montés en parallèle sur un unique caisson.

Chaque compresseur utilisé pour injecter l'air dans le caisson, est constitué d'un cylindre de section  $s$ , de volume  $V_0$  entre les sections  $AB$  d'abscisse  $x = d$  et  $CD$  d'abscisse  $x = 0$ , de deux soupapes  $S_1$  et  $S_2$ , d'un tuyau de volume  $v$  délimité par les sections  $CD$  et  $EF$  et d'un piston mobile sans frottement entre les positions  $AB$  et  $CD$  (Cf. figure page suivante). La pression atmosphérique constante  $P_0$  s'exerce sur la face extérieure du piston.



Lors de la phase d'aspiration, la soupape  $S_2$  se ferme et la soupape  $S_1$  s'ouvre quand la pression dans le cylindre est juste inférieure à la pression atmosphérique  $P_0$ . L'air à la pression atmosphérique  $P_0$  est alors aspiré dans le cylindre. Lors du retour du piston la soupape  $S_1$  se ferme alors que la soupape  $S_2$  s'ouvre dès que la pression dans le cylindre devient juste supérieure à la pression  $P$  dans le caisson.

Le volume d'air dans le caisson reste à la valeur constante  $V_c$  tant que la pression  $P$  dans le caisson n'a pas atteint la pression  $P_f$ . On prendra  $P_f = 3P_0$ .

Toutes les transformations sont quasi-statiques et s'effectuent à température constante  $T_0$  : la température de l'atmosphère. L'air, quelle que soit sa pression, sera considéré comme un gaz parfait.

Valeurs numériques :  $P_0 = 1,0 \text{ bar}$  ;  $T_0 = 290 \text{ K}$  ;  $V_c = 150 \text{ m}^3$  ;  $V_0 = 2,0 \text{ m}^3$  ;  $v = 0,50 \text{ m}^3$  ; constante des gaz parfaits  $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .

- À l'instant initial la pression de l'air dans les compresseurs et dans le caisson est la pression atmosphérique  $P_0$ . Les pistons sont en position  $AB$ . Un moteur actionne les pistons de  $AB$  à  $CD$ . On suppose  $P_1 < P_f$ . En utilisant la conservation de la matière déterminer, en fonction de  $P_0$ ,  $V_0$ ,  $V_c$ ,  $v$ ,  $N$ ,  $R$  et  $T_0$  la pression  $P_1$  et la variation  $\Delta n$  du nombre de moles d'air dans le caisson. Effectuer l'application numérique.
- À un instant donné, les pistons sont dans la position  $AB$ , les soupapes  $S_2$  sont fermées. La pression est  $P_i$  à l'intérieur du caisson. Le moteur pousse les pistons de  $AB$  à  $CD$ . On appelle  $P_{i+1}$  la pression à l'intérieur du caisson lorsque les pistons atteignent la position  $CD$ .

Montrer que  $P_0$ ,  $P_i$  et  $P_{i+1}$  vérifient la relation (1) suivante :

$$P_{i+1} - bP_0 = a(P_i - bP_0) \quad (1)$$

$a$  et  $b$  étant des constantes que l'on déterminera littéralement, puis numériquement.

- À l'aide de la relation (1), exprimer la pression  $P_n$  à l'intérieur du caisson après  $n$  va-et-vient des pistons. Quelle est la valeur limite  $P_\infty$  de  $P_n$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$  ? Interpréter physiquement cette valeur limite.
- Calculer numériquement : la limite maximale  $P_\infty$  des pressions accessible, le nombre minimum  $p$  de va-et-vient des pistons nécessaires pour obtenir dans le caisson une pression supérieure à  $P_f = 3P_0$ .

**On revient à l'instant initial avec le piston en position  $AB$  et une pression  $P_0$  dans les compresseurs et le piston.**

- Déterminer le travail  $w$  reçu par l'air contenu dans les compresseurs et le caisson lors du déplacement des pistons de  $AB$  à  $CD$ . Quel est le transfert thermique  $q$  reçu par l'air ? Exprimer  $w$  et  $q$  en fonction de  $P_0$ ,  $V_c$ ,  $v$ ,  $N$  et  $V_0$ . Application numérique.
- Du fait du travail de l'air extérieur sur le piston, en déduire l'expression du travail  $W_{aller}$  exercé par le moteur durant l'évolution de  $AB$  à  $CD$ .
- La soupape  $S_2$  se ferme alors et les pistons sont déplacés de  $CD$  à  $AB$ . Déterminer la position  $x_1$  du piston lorsque s'ouvre la soupape  $S_1$  en fonction de  $N$ ,  $V_c$ ,  $v$  et  $d$ . La mesure de  $x_1$  sera faite à partir de la position  $CD$ .
- Déterminer alors le travail  $W_{ret.}$  fourni par le moteur lors du retour de  $CD$  à  $AB$ .
- Montrer que le travail  $W_m$  fourni par le moteur lors de cet aller et retour des pistons est :

$$W_m = V_c P_1 \ln \left( \frac{P_1}{P_0} \right) + (P_0 - P_1) \times V_c$$

Application numérique.