

## Devoir non surveillé n°06 (correction)

### Q.1 Principes physiques

- le champ magnétique est généré par la circulation d'un courant d'intensité  $I$  au sein du solénoïde ;
- ce courant entraîne la présence d'une dissipation par effet Joule au sein du fil ;
- la question est de savoir si la température atteinte par le fil dépasse ou non la température de fusion du cuivre.

### Stratégie de résolution

Dans un modèle élémentaire adiabatique (sans doute suffisant), on s'intéresse à l'évolution de la température au sein du fil et on évalue la durée nécessaire pour atteindre la température de fusion.

### Mise en équations

→ Expression de l'intensité du courant dans les spires :

Le rayon du solénoïde  $R = 10$  cm représentant 1/5 de la longueur du solénoïde, la formule du champ magnétique pour un solénoïde paraît acceptable, en conséquence :

$$B = \frac{\mu_0 NI}{L} \Leftrightarrow I = \frac{BL}{\mu_0 N}$$

→ Bilan énergétique pour un élément de fil :

On considère un élément de fil de longueur  $\ell_1$  auquel on applique un premier principe de la thermodynamique entre deux instants voisins, on note  $\mathcal{P}$  la puissance apportée en volume par effet Joule et on néglige les phénomènes de dilatation. Le fil étant entouré des autres fils, on suppose, dans ce premier modèle adiabatique, l'absence d'échanges avec l'extérieur, ce qui revient à supposer que les différents fils sont à la même température, même si, en pratique, la partie centrale du solénoïde est plus chaude que la zone périphérique et un flux sortant apparaît.

Pour ce fil de masse volumique  $\mu$ , de capacité thermique massique  $c$ , de section  $\pi d^2/4$  et de longueur  $\ell_1$ , on en déduit :

$$\mu c \times \frac{\pi d^2}{4} \ell_1 dT = \mathcal{P} dt = \frac{\ell_1 \rho}{\pi d^2/4} I^2 dt$$

La puissance dissipée par effet Joule a été exprimée en considérant que ce fil de résistivité  $\rho$  possédait une résistance électrique  $R_{elec} = \frac{\ell_1 \rho}{\pi d^2/4}$ .

On en déduit :

$$\frac{dT}{dt} = \frac{16\rho I^2}{\pi^2 d^4 \mu c} = \frac{16\rho}{\pi^2 d^4 \mu c} \times \left( \frac{BL}{\mu_0 N} \right)^2$$

Application numérique :

$$\frac{dT}{dt} = \frac{16 \times 1,68 \times 10^{-8}}{\pi^2 \times (2,0 \times 10^{-3})^4 \times 8,96 \times 10^3 \times 385} \times \left( \frac{4 \times 0,5}{4\pi \times 10^{-7} \times 10^4} \right)^2 \simeq 13 \text{ K/s}$$

Passer d'une température de l'ordre de 300 K à la température de fusion du cuivre  $T_f = 1356$  K nécessite alors une durée  $\tau = 80$  s

### Analyse du résultat

Dans le cadre de ce modèle, le dispositif ne peut fonctionner que quelques secondes, à la limite quelques dizaines de seconde. **Un tel bobinage résistif est donc inadapté.**

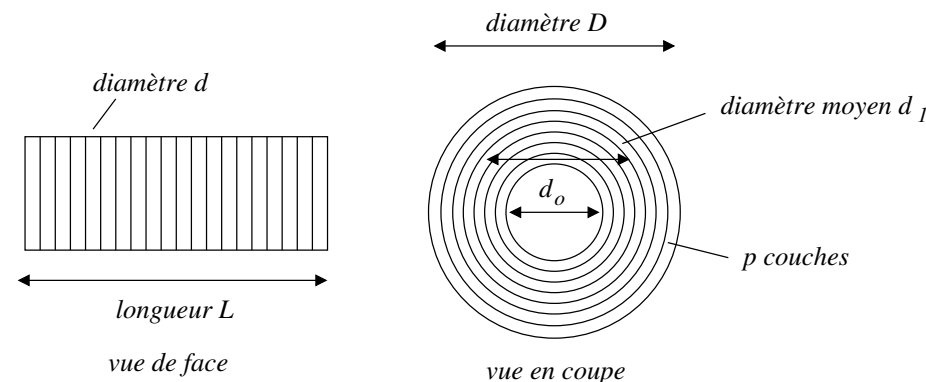
Bien évidemment, l'augmentation de la température serait partiellement compensée par des échanges conducto-convectifs en surface, jusqu'à un équilibre avec les apports par effet Joule en régime permanent. Un calcul plus rigoureux (mais sans doute trop chronophage) nécessiterait d'évaluer la température d'équilibre et de montrer qu'elle dépasse la température de fusion. De plus les effets conducto-convectifs semblent plutôt apparaître dans les questions suivantes.

Q.2 On considère que l'eau est prélevée à une température voisine de 20°C, la température du fil de cuivre ne peut dépasser la température de fusion, en conséquence :

$$\Delta T_{max} = 1356 - 293 \Rightarrow \Delta T_{max} \approx 1,0 \times 10^3 \text{ K}$$

Notons que cette valeur est quelque peu surestimée car il semble raisonnable de prendre une sécurité sur la température de fusion sans compter que le cœur du solénoïde est plus chaud que la périphérie. De plus l'eau en sortie du dispositif aura nécessairement une température supérieure à celle d'entrée.

En régime permanent, la puissance évacuée à la surface est égale à la puissance dissipée par effet Joule ce qui nécessite de connaître la longueur totale du fil de cuivre.



Sur la longueur  $L = 50$  cm du solénoïde, on peut disposer  $N_1 = 250$  spires de diamètre  $d = 2,0$  mm (vue de face). Pour arriver aux  $N = 10000$  spires, il faut donc enrouler  $p = 40$  couches de spires (vue en coupe).

Les  $p$  couches représentent une épaisseur  $p \times d = 8$  cm. Partant du rayon extérieur  $R = 10$  cm, on a donc des spires jusqu'à un rayon intérieur  $R_0 = 2,0$  cm, c'est à dire un

rayon moyen  $R_1 = 6,0$  cm.

En considérant un rayon moyen  $R_1$  pour  $N = 10000$  spires, on obtient une longueur totale pour le fil électrique :

$$L_{tot} = N \times 2\pi R_1 = 10^4 \times 2 \times \pi \times 8,0 \times 10^{-2} \Rightarrow L_{tot} = 3,8 \text{ km}$$

Et donc pour la puissance totale dissipée par effet Joule :

$$\mathcal{P}_{tot} = RI^2 = \frac{4L_{tot}\rho}{\pi d^2} \times \left(\frac{BL}{\mu_0 N}\right)^2 = \frac{4 \times 3,8 \times 10^3 \times 1,68 \times 10^{-8}}{\pi \times (2,0 \times 10^{-3})^2} \times \left(\frac{4,0 \times 0,50}{4\pi \times 10^{-7} \times 10^4}\right)^2$$

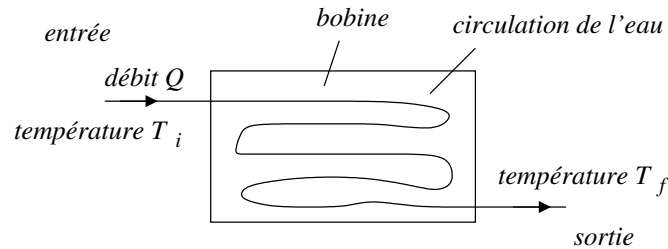
C'est à dire  $\mathcal{P}_{tot} = 5,2 \times 10^2$  kW.

En régime permanent cette puissance doit être évacuée en surface *via* un transfert conducto-convectif :

$$\mathcal{P}_{tot} = h \times \Delta T \times S \Leftrightarrow \boxed{S = \frac{\mathcal{P}_{tot}}{h\Delta T}}$$

A.N. :  $S = \frac{5,2 \times 10^5}{100 \times 1,0 \times 10^3} \Rightarrow \boxed{S \approx 5 \text{ m}^2}$ .

**Q.3** En faisant circuler l'eau au contact de la bobine, on évacue l'énergie thermique en chauffant l'eau qui circule selon le schéma symbolique suivant :



Le régime étant permanent, on applique alors le premier principe industriel pour l'eau qui circule entre l'entrée et la sortie du système.

$$\mu Q \Delta(h + e_c + e_p) = \mathcal{P}_{th} + \mathcal{P}_{meca}^{utile}$$

Dans le cas présent, le seul échange s'identifie à la puissance thermique délivrée par la bobine. Les variations d'énergie cinétique et potentielle sont totalement négligeables vis à vis de la variation d'enthalpie. Dans le cas de l'eau, fluide incompressible, la variation d'enthalpie massique est proportionnelle à la variation de température entre l'entrée et la sortie. En prenant l'eau dans une rivière ou un lac  $T_i \approx 15^\circ\text{C}$  et en se limitant à une température de sortie  $T_f \approx 95^\circ\text{C}$  pour éviter un changement d'état, on en déduit pour le débit :

$$\mu_{eau} Q c_c (T_f - T_i) = \mathcal{P} \Leftrightarrow \boxed{Q = \frac{\mathcal{P}}{\mu_{eau} c_c (T_f - T_i)}}$$

A.N :

$$Q = \frac{5,2 \times 10^5}{1,0 \times 10^3 \times 4,2 \times 10^3 \times 80} \Rightarrow \boxed{Q \approx 1,5 \text{ L/s}}$$

**Q.4** La surface de contact déterminée est nettement supérieure à la surface latérale extérieure de la bobine ce qui pose problème! il faudrait faire passer le dispositif de refroidissement au sein même de la bobine pour augmenter la surface de contact mais ceci en compliquant la réalisation.

D'autre part le débit d'eau déterminé n'est efficace que pour refroidir une bobine d'un diamètre de 20 cm. Comme un grand nombre de bobines doivent être disposées pour assurer la sustentation sur toute la longueur de la rame, la consommation d'eau serait là aussi prohibitive.

En conclusion, chacun des éléments étudiés aux questions 1, 2 et 3 montre bien que, du fait de l'effet Joule, **l'utilisation de conducteurs classiques résistifs pour générer ce champ magnétique intense est impossible.**

**Q.5 La résistivité d'un matériau supraconducteur est nulle** ce qui supprime l'échauffement par effet Joule. Le phénomène de supraconductivité se produit à des températures proches du zéro absolu à quelques exceptions près.

**Q.6** L'excitation magnétique est liée à l'aimantation et au champ magnétique par la relation :

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

L'excitation magnétique est déterminée *via* le vecteur densité de courants libres :

$$\boxed{\text{rot} \vec{H} = \vec{j}_l}$$

**Q.7** Dans le cadre de l'ARQS, on néglige le courant de déplacement dans l'équation de Maxwell-Ampère, c'est à dire :

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad ; \quad \text{div} \vec{B} = 0 \quad ; \quad \text{rot} \vec{H} = \vec{j}_l \quad ; \quad \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

La densité volumique de charges est en général nulle dans un milieu ferromagnétique. De plus, il faut ajouter, d'une part, la relation précédente liant l'excitation magnétique, le champ magnétique et l'aimantation et d'autre part, pour résoudre le problème, une relation caractéristique du milieu, en pratique ici, ce sera le caractère linéaire du milieu.

**Q.8** Le circuit magnétique est un tube de champ magnétique, l'équation de Maxwell-Thomson assure que **le flux du champ magnétique est le même sur toute section droite du tube.**

**Q.9** La section étant invariante le long du tube :  $\|\vec{B}_1\| = \|\vec{B}_2\| = \|\vec{B}_a\|$ .

**Q.10** Il faut supposer  $\mu_r \gg 1$  ce qui assure que les lignes de champ sont perpendiculaires à la surface de l'aimant au niveau de l'entrefer. Il faut de plus supposer que  $z$  soit faible devant les dimensions latérales de l'aimant.

**Q.11** Un matériau doux est caractérisé, **hors saturation**, par une **relation de linéarité entre le champ magnétique et l'excitation magnétique**. Cette hypothèse est applicable dans le cas d'un cycle d'hystérésis dit « étroit » par opposition au cycle large d'un matériau dur.

**Q.12**  $\vec{B} = \mu \vec{H}$  avec  $\mu$  la perméabilité magnétique du matériau.

**Q.13** La perméabilité relative est définie selon  $\mu_r = \mu / \mu_0$ . Pour un milieu ferromagnétique, on peut retenir  $\mu_r \approx 10^4$  à  $10^5$ .

**Q.14** Le théorème d'Ampère assure que la circulation de l'excitation magnétique le long du contour ( $C$ ) est égale à la somme des courants enlacés comptés positifs si orientés conformes à l'orientation du contour :

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = Ni$$

**Q.15** En appelant  $H_{int}$  l'excitation magnétique dans le milieu ferromagnétique et  $H_a$  celle dans l'air assimilé au vide, on obtient, en supposant une orientation conforme des courants et du contour :

$$H_{int} \times \ell + H_a \times 2z = Ni$$

Les caractéristiques des milieux imposent  $B_2 = \mu_0 \mu_r H_{int}$  et  $B_a = \mu_0 H_a$  et sachant que  $B_a = B_2$ , on en déduit :

$$\frac{B_2}{\mu_0 \mu_r} \times \ell + \frac{B_2}{\mu_0} \times 2z = Ni \Leftrightarrow B_2 = \frac{\mu_0 Ni}{\ell / \mu_r + 2z}$$

**Q.16** Compte tenu que  $\mu_r \gg 1$  (question 13.) on suppose  $\ell / \mu_r \ll 2z$  et finalement :

$$B_2 \approx \frac{\mu_0 Ni}{2z}$$

**Q.17** L'inductance propre se définit à partir du flux propre du champ magnétique à travers les  $N$  spires du bobinage :

$$Li = NB_2 S = \frac{\mu_0 N^2 S}{2z} i \Rightarrow L(z) = \frac{\mu_0 N^2 S}{2z}$$

**Q.18**  $\mathcal{E}_m = \frac{L(z)i(t)^2}{2}$ .

**Q.19** Compte tenu de la formule proposée :

$$\vec{F}_{em} = -\frac{\mu_0 N^2 S}{4z^2} i^2 \vec{u}_z$$

**Q.20** L'équilibre des forces impose :

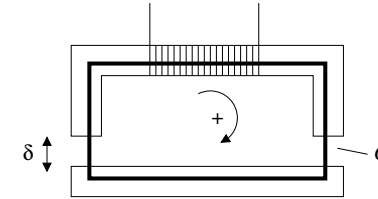
$$-\frac{\mu_0 N^2 S}{4\delta^2} i^2 \vec{u}_z + mg \vec{u}_z = \vec{0} \Leftrightarrow m = \frac{\mu_0 N^2 S i^2}{4g\delta^2}$$

A.N. :  $m = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times (10^3)^2 \times 0,50 \times 10^2}{4 \times (1,0 \times 10^{-2})^2 \times 9,8} \Rightarrow m = 16 \times 10^3 \text{ kg}$ .

**Q.21** Compte tenu du rapport des masses, cela nécessite **12 électroaimants**.

**Q.22** La norme de la force magnétique est une fonction décroissante de  $z$ . En conséquence, partant d'une situation d'équilibre, si la distance  $z$  diminue, la force magnétique augmente en norme, ce qui diminue la distance  $z$  et ainsi de suite jusqu'à ce que les deux pôles viennent se coller. **Le système est instable.**

**Q.23** Pour calculer l'inductance propre de la bobine  $B_1$ , on considère un unique courant traversant la bobine  $B_1$  et un circuit ( $C$ ) comme indiqué ci-dessous, ce qui revient à supposer que la partie centrale canalise les lignes de champ générées par la bobine 1 qui ne fuient donc pas vers le second circuit.



On se retrouve dans la situation de la partie précédente avec  $\delta$  à la place de  $z$ , donc :

$$L_e = \frac{\mu_0 N_c^2 S}{2\delta}$$

**Q.24** Avec un déplacement  $\Delta z$ , on obtient :

$$L_1 = \frac{\mu_0 N_c^2 S}{2(\delta - \Delta z)} = \frac{\mu_0 N_c^2 S}{2\delta} \times \frac{1}{1 - \Delta z / \delta} \Rightarrow L_1 \approx L_e \times \left(1 + \frac{\Delta z}{\delta}\right)$$

De la même manière en permutant les signes :  $L_2 \approx L_e \times \left(1 - \frac{\Delta z}{\delta}\right)$

**Q.25** D'après la formule du pont diviseur de tension :

$$\underline{u}_1 = \frac{jL_1 \omega}{R + j(L_1 + L_2)\omega} \times \underline{e} \quad \text{et} \quad \underline{u}_2 = \frac{jL_2 \omega}{R + j(L_1 + L_2)\omega} \times \underline{e}$$

**Q.26** Diviseur de tension à l'entrée non inverseuse :  $v_+ = \frac{u_1}{2}$

On applique une loi des nœuds en terme de potentiel à l'entrée inverseuse :

$$\frac{u_2 - v_-}{R_2} = \frac{v_- - u_s}{R_2} \Leftrightarrow v_- = \frac{u_2 + u_s}{2}$$

Pour un ALI idéal en fonctionnement linéaire :  $v_+ = v_-$  et on en déduit :

$$\underline{u}_s = \underline{u}_1 - \underline{u}_2 \quad \text{et} \quad K = 1$$

**Q.27** À l'aide des formules précédemment obtenues on en déduit :

$$\frac{\underline{u}_s}{\underline{e}} = \frac{j\omega(L_1 - L_2)}{R + j(L_1 + L_2)\omega} = \frac{j\omega \times 2L_e \Delta z / \delta}{R + 2jL_e \omega} = \frac{\Delta z}{\delta} \times \frac{j\omega \times 2L_e / R}{1 + j\omega \times 2L_e / R}$$

$$\Leftrightarrow \underline{T}(j\omega) = \frac{\underline{u}_s}{\underline{e}} = T_0 \times \frac{j\omega/\omega_0}{1 + j\omega/\omega_0} \quad \text{avec} \quad T_0 = \frac{\Delta z}{\delta} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \frac{R}{2L_e}$$

**Q.28** On pose  $x = \omega/\omega_0$ , le gain en décibel et la phase de la fonction de transfert prennent la forme (dans le cas  $\Delta z > 0$  et donc  $T_0 > 0$ ) :

$$T_{dB}(u) = 20 \log(T_0) + 20 \log\left(\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right) \quad \text{et} \quad \varphi(u) = \frac{\pi}{2} - \arctan(u)$$

— Asymptotes basse fréquence :

$$T_{dB}(u) \approx 20 \log(T_0) + 20 \log(u) \quad \text{et} \quad \varphi(u) \approx \frac{\pi}{2}$$

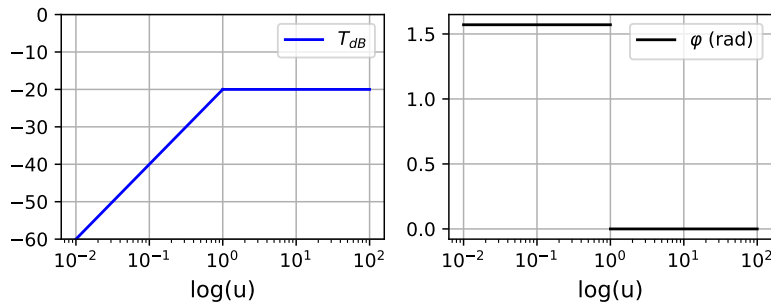
— Asymptotes haute fréquence :

$$T_{dB}(u) \approx 20 \log(T_0) \quad \text{et} \quad \varphi(u) \approx 0$$

— pulsation de coupure : en  $u = 1$

$$T_{dB}(1) = 20 \log(T_0) - 20 \log\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 20 \log(T_0) - 3 \quad \text{et} \quad \varphi(1) \approx \pi/4$$

Ce qui donne pour le tracé du diagramme de Bode asymptotique (avec  $T_0 = 0,10$  en conformité avec  $|\Delta z| \ll \delta$ ) :



Remarque : si  $T_0 < 0$ , il faut considérer  $|T_0|$  pour le module et ajouter  $\pi$  à la phase.

**Q.29** On est en présence d'un **filtre passe-haut du premier ordre**.

**Q.30** La pulsation  $\omega_0$  est la **pulsation de coupure** associée à une atténuation du gain en décibel maximal de 3 dB.

**Q.31** Pour  $\omega \gg \omega_0$ ,  $\underline{T}(j\omega) = T_0 = \frac{\Delta z}{\delta}$ .

**Q.32**  $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{R}{4\pi L_e} = \frac{750}{4\pi \times 60 \times 10^{-3}} = 1,0 \text{ kHz}$

On a seulement  $f = 4f_0$  cependant pour cette fréquence  $u = f/f_0 = 4$ , donc :

$$|\underline{T}(f)| = T_0 \times \frac{4}{\sqrt{1+4^2}} = 0,97 \approx 1,0$$

Il semble donc raisonnable de confondre le module de la fonction de transfert et sa valeur asymptotique pour  $f = 4 \text{ kHz}$ , en conséquence :

$$u_s(t) = E \frac{\Delta z}{\delta} \cos(\omega t + \varphi)$$

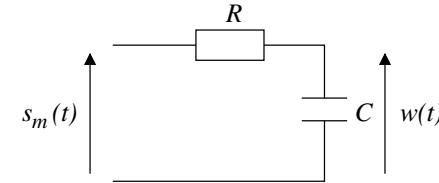
**Q.33** Pour  $\Delta z > 0$ ,  $\varphi = \pi/2 - \arctan(4) \Rightarrow \varphi = 0,24 \text{ rad}$ .

**Q.34** En sortie du multiplieur :

$$s_m(t) = K_m E^2 \frac{\Delta z}{\delta} \cos(\omega t) \cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow s_m(t) = \frac{K_m E^2 \Delta z}{2\delta} [\cos(\varphi) + \cos(2\omega t + \varphi)]$$

Le signal est donc constitué d'une **composante continue** et d'une **composante sinusoïdale à la pulsation  $2\omega$** .

**Q.35** Pour extraire la composante continue du signal proportionnelle à  $\Delta z$ , on utilise un filtre passe-bas pour supprimer la composante haute fréquence. La solution la plus simple consiste à considérer le **filtre passe-bas du premier ordre** représenté ci-dessous :



La fonction de transfert de ce filtre s'exprime selon :  $\underline{H} = \frac{1}{1 + j\omega/\omega_c}$  avec  $\omega_c = \frac{1}{RC}$ .

Sachant que  $f = 4 \text{ kHz}$ ,  $2\omega = 4\pi f \approx 50 \times 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ , une pulsation de coupure  $\omega_c = 500 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  permet d'obtenir une atténuation voisine d'un facteur 100. On peut par exemple retenir  $R = 1,0 \text{ k}\Omega$  et  $C = 2,0 \text{ }\mu\text{F}$ .

**Q.36** D'après la question 33,  $\frac{S_m}{\Delta z} = \frac{K_m E^2}{2\delta} \cos(\varphi)$ .

**Q.37** Le déplacement relatif revient à comparer le déplacement  $\Delta z$  à l'espacement  $\delta$  :

$$\frac{\Delta z}{\delta} = \frac{2S_m}{K_m E^2 \cos(\varphi)}$$

Application numérique :

$$\left(\frac{\Delta z}{\delta}\right)_{\min} = \frac{2 \times 0,010}{1,0 \times 6,0^2 \times \cos(0,24)} \Rightarrow \left(\frac{\Delta z}{\delta}\right)_{\min} = 5,7 \times 10^{-4} = 0,056 \%$$

**Q.38 Stratégie de résolution :**

- en régime inertiel, la puissance motrice doit compenser la puissance liée aux frottements ;
- les frottements sont de deux types : frottements fluides associés à une traînée quadratique (dans l'air, à de telles vitesses, l'écoulement est nécessairement turbulent) et frottement solide décrit par une loi type loi de Coulomb pour le seul TGV sachant que le Transrapid lévite.

**Mise en équations :**

Avec  $M$  la masse du train, la norme de la force de frottement solide prend la forme :  $T_s = \mu(V) \times Mg$ . Compte tenu du graphique de l'annexe 2, on retient  $\mu = 0,06$  à la vitesse  $V$  considérée pour le TGV et  $\mu = 0$  pour le Transrapid.

Dans l'air de masse volumique  $\rho$ , pour une section aérodynamique  $S$ , la norme de la force de traînée s'écrit :  $T_f = \frac{1}{2}C_x\rho V^2S$

La puissance associée aux forces de frottement a pour expression :

$$\mathcal{P} = \left[ \mu(V) \times Mg + \frac{1}{2}C_x\rho V^2S \right] V$$

**Application numérique :**

Cas du Transrapid :

$$\mathcal{P}_1 = \frac{1}{2} \times 0,24 \times 1,2 \times \left(\frac{300}{3,6}\right)^2 \times 11 \times \left(\frac{300}{3,6}\right) \Rightarrow \boxed{\mathcal{P}_1 \approx 0,92 \text{ MW}}$$

Cas du TGV duplex :

$$\mathcal{P}_1 = \left[ 0,06 \times 390 \times 10^3 \times 9,8 + \frac{1}{2} \times 0,35 \times 1,2 \times \left(\frac{300}{3,6}\right)^2 \times 12 \right] \times \left(\frac{300}{3,6}\right) \Rightarrow \boxed{\mathcal{P}_2 \approx 21 \text{ MW}}$$

**Analyse des résultats :**

Pour le TGV, l'annexe indique une puissance de l'ordre de 9 MW par motrice, c'est à dire 18 MW pour deux motrices. La réponse trouvée est du même ordre de grandeur. Le détail du calcul montre que la force de frottement solide représente près de 90% du frottement.

Enfin, en ramenant la puissance au nombre de passagers transporté :

- pour le Transrapid : **3 kW par passager ;**
- pour le TGV duplex : **41 kW par passager.**

**Le Transrapid semble nettement plus avantageux. Attention toutefois que le coût des bobines supraconductrices et l'énergie nécessaire à leur système de refroidissement n'ont pas été pris en compte.**

**Q.39** On appelle  $T$  la norme de la force de freinage et donc  $\mathcal{P} = -T \times v$  la puissance

instantanée associée au freinage. Attention que  $\mathcal{P}$  est supposée constante ce qui n'est donc pas le cas de  $T$ .

On applique alors un théorème de la puissance cinétique au train en supposant que la seule force qui travaille est la force de freinage et on appelle  $x$  la coordonnée le long de l'axe horizontal.

$$d\mathcal{E}_c = d\left(\frac{1}{2}Mv^2\right) = -T \times dx \Leftrightarrow Mv dv = -T dx$$

En multipliant par la vitesse, on en déduit :  $Mv^2 dv = -Tv \times dx = -\mathcal{P} \times dx$

On intègre alors entre la position initiale  $x = 0$  et la position finale  $x = L$ , pour une vitesse passant de  $v_0$  à 0 :

$$\left[ M\frac{v^3}{3} \right]_{v_0}^0 = -P \times L \Rightarrow \mathcal{P} = \frac{Mv_0^3}{3L}$$

Application numérique :  $\mathcal{P} = \frac{190 \times 10^3 \times (300/3,6)^3}{3 \times 3,6 \times 10^3} \Rightarrow \boxed{\mathcal{P} = 10 \text{ MW}}$

**Q.40** Commençons par appliquer le théorème de la puissance cinétique au train avec  $\mathcal{P}$  la puissance constante de freinage (hors traînée) :

$$d\mathcal{E}_c = d\left(\frac{1}{2}Mv^2\right) = -\mathcal{P} dt \Rightarrow v^2(t) = v_0^2 - \frac{2\mathcal{P}}{M}t$$

La puissance instantanée de la force de traînée s'exprime selon :

$$\mathcal{P}_t = \frac{1}{2}C_x\rho S v^2 \times v$$

C'est à dire pour la valeur moyenne en appelant  $T$  la durée de freinage :

$$\langle \mathcal{P}_t \rangle = \frac{1}{2}C_x\rho S \times \frac{1}{T} \int_0^T v^3(t) dt = \frac{C_x\rho S}{2T} \int_0^T \left(v_0^2 - \frac{2\mathcal{P}}{M}t\right)^{3/2} dt$$

$$\Leftrightarrow \langle \mathcal{P}_t \rangle = \frac{C_x\rho S}{2T} \times \frac{-M}{5\mathcal{P}} \left[ \left(v_0^2 - \frac{2\mathcal{P}}{M}t\right)^{5/2} \right]_0^T = \frac{C_x\rho S}{2T} \times \frac{Mv_0^5}{5\mathcal{P}}$$

où l'on a utilisé  $\frac{1}{2}Mv_0^2 = \mathcal{P} \times T$  qui correspond au théorème de la puissance cinétique intégré sur le mouvement complet. On en déduit finalement en utilisant à nouveau cette relation pour éliminer  $T$  :

$$\boxed{\langle \mathcal{P}_t \rangle = \frac{C_x\rho S v_0^3}{5}}$$

Application numérique :  $\langle \mathcal{P}_t \rangle = \frac{0,24 \times 1,2 \times 11 \times (300/3,6)^3}{5} \Rightarrow \boxed{\langle \mathcal{P}_t \rangle = 0,37 \text{ MW}}$

**Q.41** Le terme négligé représente environ 4% de la puissance dissipée, **l'approximation apparaît légitime.**