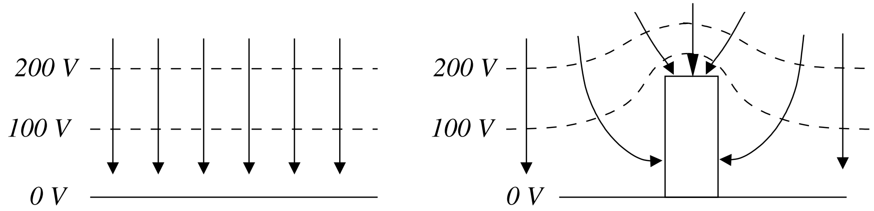
Devoir non surveillé n°05 (correction)

Le système Terre-atmosphère

1. Les lignes de champ sont perpendiculaires aux équipotentielles et dirigées dans le sens des potentiels décroissants.



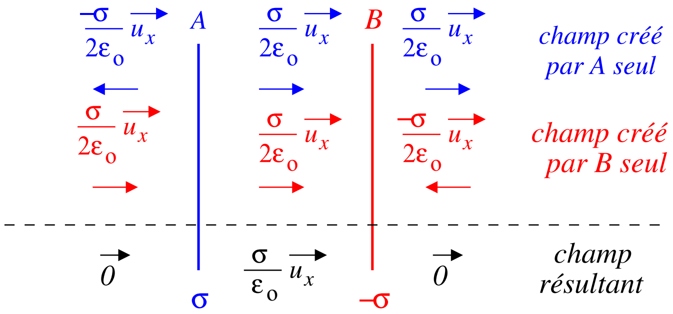
2. On constate que deux équipotentielles sont plus rapprochées au voisinage de la tête de l'individu. Le potentiel variant sur une distance plus courte, le champ électrostatique est plus fort (Cf. $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$). On parle du « **pouvoir des pointes** ». La densité volumique de charge étant nulle dans l'air, le vecteur champ électrique est à flux conservatif ($\text{div}\vec{E} = 0$). Les zones de champ fort sont associées au resserrement des lignes de champ.

3. Condensateur plan :

   (a) Une charge ponctuelle située à l'origine du système de coordonnées crée au point M distant de r un champ électrique : $\vec{E} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$

   En terme de dimension : $[E] = \dfrac{[q]}{[\varepsilon_0][r]^2} = \dfrac{[\sigma]}{[\varepsilon_0]}$.

   (b) On utilise le **théorème de superposition** pour déterminer le champ électrique entre les armatures :



   On en déduit que le champ électrique est nul à l'extérieur et vaut entre les plaques $\boxed{E_{int} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}}$.

   (c) $E = \dfrac{1,1\times10^{-9}}{8,9\times10^{-12}} = \dfrac{1000}{8,9} \quad\Rightarrow\quad \boxed{E \simeq 1,1\times10^{2}\ \text{V}\cdot\text{m}^{-1}}$.
   Cette valeur est conforme à celle proposée au début de l'énoncé.

Le champ électrique dans la basse atmosphère

1. Un référentiel est un **ensemble d'observateurs fixes les uns par rapport aux autres et munis d'une montre**. Plus simple, un référentiel peut être identifié à un solide par rapport auquel on étudie le mouvement.
   Soit $\mathcal{R}$ un référentiel galiléen ; dans ce référentiel, un objet soumis à des forces qui se compensent a un vecteur vitesse $\vec{v}_{\mathcal{R}} = \vec{cste}$ (**le principe d'inertie s'applique**).
   Soit $\mathcal{R}'$ un référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à $\mathcal{R}$. Vu de $\mathcal{R}'$, le mouvement de l'objet reste rectiligne uniforme. Le principe d'inertie s'applique dans $\mathcal{R}'$ qui est lui-même galiléen.

2. Le parallélépipède est soumis à son poids et aux forces de pression ; en projection selon l'axe Oz, l'équilibre des forces impose :
$$-\rho g dxdydz + [P(z) - P(z+dz)]\,dxdy = 0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{dP = -\rho g dz}$$

3. Pour un gaz parfait subissant une transformation adiabatique et réversible (avec $\gamma = cste$), la loi de Laplace impose $PV^\gamma = cste$.
   La masse du système $m = \rho \times V$ étant elle même une constante, la loi de Laplace prend alors la forme :
$$\boxed{P\rho^{-\gamma} = cste'}$$

4. On commence par différencier la loi de Laplace :
$$\frac{dP}{P} - \gamma\frac{d\rho}{\rho} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad dP = \gamma\frac{P}{\rho}d\rho$$
   Sachant que $dP = -\rho g dz$, on en déduit :
$$\frac{\gamma P}{\rho}d\rho = -\rho g dz$$
   On élimine alors P sachant que $P_0\rho_0^{-\gamma} = P\rho^{-\gamma}$, c'est à dire :
$$\frac{\gamma P_0\rho_0^{-\gamma}\rho^\gamma}{\rho^2}d\rho = -g dz \quad\Leftrightarrow\quad \rho^{\gamma-2}d\rho = -\frac{g}{\gamma P_0\rho_0^{-\gamma}}dz$$
   On intègre alors entre $z = 0$ et une altitude quelconque :
$$\rho^{\gamma-1} - \rho_0^{\gamma-1} = -\frac{g(\gamma-1)}{\gamma P_0\rho_0^{-\gamma}}z \quad\Leftrightarrow\quad \boxed{\left[\frac{\rho(z)}{\rho_0}\right]^{\gamma-1} = 1 - \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{g\rho_0}{P_0}z}$$

5. La proportionnalité entre le champ électrique et la masse volumique s'écrit : $\dfrac{E(z)}{E_0} = \dfrac{\rho(z)}{\rho_0}$, avec $P_0 = \rho_0 RT/M$, on en déduit :
$$\boxed{E(z) = E_0\left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{Mgz}{RT}\right)^{1/(\gamma-1)}}$$

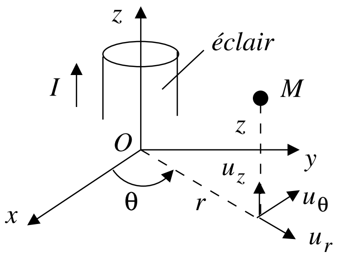
Le mouvement des ions

1. Des particules énergétiques venant de l'espace (rayons cosmiques, particules du vent solaires) peuvent entrer en collision avec les particules de l'atmosphère et les ioniser.

2. On applique la deuxième loi de Newton à l'ion dans le référentiel terrestre supposé galiléen :
$$\boxed{m\frac{d\vec{v}}{dt} = e\vec{E} - \lambda\vec{v}}$$
3. Commençons par écrire cette équation sous forme canonique :
$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = \frac{e\vec{E}}{m} \quad \text{avec} \quad \boxed{\tau = \frac{m}{\lambda}}$$
Pour une vitesse initiale nulle, la solution est de la forme :
$$\boxed{\vec{v}(t) = \frac{e\vec{E}\tau}{m}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$
4. $\boxed{\vec{v}_l = \frac{e\vec{E}\tau}{m}}$. De l'expression de τ, on déduit que λ s'exprime en $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$ dans le système international d'unités.
5. Applications numériques :
   (a) $\tau = \frac{4,8 \times 10^{-26}}{5 \times 10^{-16}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau = 9,6 \times 10^{-11} \text{ s}}$;
   $v_l = \frac{1,6 \times 10^{-19} \times 100 \times 9,6 \times 10^{-11}}{4,8 \times 10^{-26}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_l = 3,2 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}}$
   (b) Le poids de la particule est de l'ordre de 5×10^{-25} N quand la force électrique vaut $1,6 \times 10^{-17}$, donc $\frac{P}{eE} \simeq 10^{-8} \ll 1$. **L'approximation est légitime**.
   (c) Le champ magnétique terrestre est de l'ordre de 50 μT à la surface terrestre, la force magnétique sur la particule chargée est majorée par :
   $f_m \leq ev_lB = 1,6 \times 10^{-19} \times 3,2 \times 10^{-2} \times 5 \times 10^{-5} = 2,6 \times 10^{-25}$ N
   La force magnétique est négligeable vis à vis de la force électrique.

La foudre

1. Coordonnées cylindriques :



2. Les électrons se dirigent vers la Terre, **le courant est donc dirigé selon $+\vec{u}_z$**.
3. Champ magnétique :
   (a) Le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est un plan de symétrie de la distribution des courants, en un point de ce plan le champ magnétique est perpendiculaire à ce plan :
   $$\vec{B} = B_\theta(r, \theta, z, t)\vec{u}_\theta$$
   L'invariance par rotation d'angle θ et translation selon Oz assure que la composante orthoradiale du champ magnétique ne dépend ni de θ ni de z :
   $$\boxed{\vec{B} = B_\theta(r, t)\vec{u}_\theta}$$
   (b) **Théorème d'Ampère** : $\boxed{\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}.d\vec{l} = \mu_0 I_{enl}}$, avec I_{enl} les courants enlacés par le contour fermé et comptés positivement s'ils traversent le contour conformément à l'orientation de celui-ci.
   (c) On applique le théorème d'Ampère sur un cercle centré sur l'axe Oz de rayon $r > a$ et orienté selon $\vec{u}_\theta$. La totalité du courant est alors enlacé :
   $$\oint \vec{B}.d\vec{l} = \mu_0 I(t) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi r}\vec{u}_\theta}$$
   (d) En un tel point, les deux pylônes créent des champs magnétiques opposés, **le champ magnétique est nul**.
   (e) Le champ magnétique se mesure à l'aide d'une **sonde à effet Hall**. La présence du champ magnétique au sein du matériau crée une tension proportionnelle à ce champ.
4. Considérons un électron à la périphérie du fil, il subit de la part du champ magnétique créé par le reste de la distribution une force de Lorentz :
$$\vec{f} = -e \times (-v\vec{u}_z) \wedge B(r, t)\vec{u}_\theta = -evB\vec{u}_r$$
Les électrons tendent à se rapprocher de l'axe, le canal a donc bien tendance à imploser.
5. Les molécules de l'air sont ionisées et donc excitées. **Lors des processus de désexcitation des photons visibles sont émis** (cf. lampes spectrales utilisées en TP). Le tonnerre est un son produit par **l'expansion brutale de la fine colonne d'air qui a été chauffée** très rapidement par la foudre au cours d'un orage.

Perturbation des circuits électriques

1. $I(t) = \frac{dq}{dt}$, on en déduit la charge totale débitée pendant une durée t en intégrant cette relation :
$$\boxed{Q(t) = \int_0^t I(t)dt}$$
La charge totale débitée est représentée par l'aire sous la courbe, courbe qui délimite en bonne approximation un triangle :
$$Q = \frac{30 \times 10^3 \times 1,0 \times 10^{-3}}{2} \quad \boxed{Q = 15 \text{ C}}$$
On en déduit l'intensité moyenne :
$$I_{moy} = \frac{Q}{T} = \frac{15}{10^{-3}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_{max} = 15 \times 10^3 \text{ A}}$$
La valeur de l'intensité moyenne permet de comprendre la dangerosité de l'éclair.

2. t_1 est associé au maximum de l'intensité. On détermine cet instant en recherchant l'annulation de la dérivée de la fonction proposée.

$$I'(t_1) = I_0\left(-\alpha\exp(-\alpha t_1) + \beta\exp(-\beta t_1)\right) = 0$$

On en déduit : $\boxed{t_1 = \frac{1}{\alpha-\beta}\ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}$

3. Pour $t = t_1$, l'intensité est maximale :

$$I(t_1) = I_0\left[\exp(-\alpha t_1) - \exp(-\beta t_1)\right] = I_{max}$$

Pour $t = t_2$, l'intensité est égale à la moitié de sa valeur maximale :

$$I(t_2) = I_0\left[\exp(-\alpha t_2) - \exp(-\beta t_2)\right] = \frac{I_{max}}{2}$$

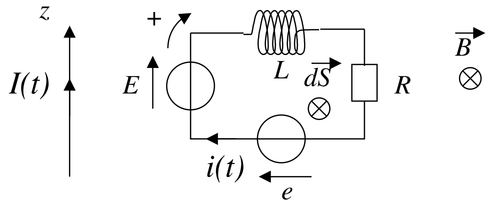
On en déduit le système d'équations :

$$\boxed{t_1 = \frac{1}{\alpha-\beta}\ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\exp(-\alpha t_1) - \exp(-\beta t_1)}{\exp(-\alpha t_2) - \exp(-\beta t_2)} = 2}$$

4. Induction

(a) **Michael Faraday** dans la première moitié du XIX$^{\text{e}}$ siècle.

(b) Avec les orientations proposées, le vecteur surface et le champ magnétique sont colinéaires et de même sens.



Le champ magnétique étant supposé uniforme sur le circuit :

$$e = -\frac{d\Phi(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boxed{e = -\frac{KS}{r}\frac{dI(t)}{dt}}$$

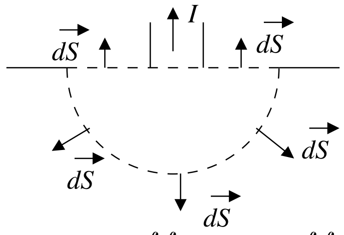
(c) L'application de la loi des mailles conduit à :

$$E + e = Ri + L\frac{di}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{KS}{r}\frac{dI(t)}{dt}}$$

(d) La force électromotrice induite est proportionnelle à la dérivée de l'intensité. D'après la figure 10, la dérivée de l'intensité est maximale pour $t \in [0, t_1[$.

Tension de pas

1. En ARQS, le vecteur courant est à flux conservatif. Le flux de ce vecteur à travers une surface fermée est donc nulle. Considérons comme surface fermée, la demi-sphère de rayon r centrée sur l'origine, contenue dans le sol et refermée par son plan équatorial au niveau du sol.



$$\oiint \vec{j}.d\vec{S} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \iint_{\text{demi-sphère}} \vec{j}.d\vec{S} + \iint_{\text{plan équa.}} \vec{j}.d\vec{S} = 0$$

On en déduit $j(r)\times\pi r^2 + I = 0$ donc $\boxed{\vec{j} = -\frac{I}{2\pi r^2}\vec{u}_r}$

2. Loi d'Ohm locale $\vec{j} = \gamma\vec{E}$, donc $\vec{E} = -\frac{I}{2\gamma\pi r^2}\vec{u}_r$.

En régime stationnaire $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$, c'est à dire en coordonnées sphériques :

$$-\frac{I}{2\pi\gamma r^2} = -\frac{dV}{dr} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V(r) = \frac{-I}{2\pi\gamma r}}$$

avec le choix d'une constante d'intégration nulle pour un potentiel nul à l'infini.

3. La différence de potentiel entre les pattes avant et arrière de la vache vaut :

$$U_p = V(d+p/2) - V(d-p/2) = \frac{I}{2\pi\gamma}\left(\frac{1}{d-p/2} - \frac{1}{d+p/2}\right) = \frac{Ip}{2\pi\gamma\left(d^2-(p/2)^2\right)}$$

Avec $d^2 \gg (p/2)^2$, on en déduit $\boxed{U_p = \frac{Ip}{2\pi\gamma d^2}}$

4. À p fixé, une distance d assez grande permet de diminuer la tension admissible entre les pattes avant et arrière du bovin. À la limite $U_p = \frac{Ip}{2\pi\gamma d_{min}^2} = RI_{max}$, c'est à dire :

$$\boxed{d_{min} = \sqrt{\frac{Ip}{2\pi\gamma RI_{max}}}} \quad \text{donc} \quad \boxed{d_{min} \simeq 8 \text{ m}}$$

5. Plus p augmente, plus la différence de potentiel est importante. La distance entre les pattes antérieurs et postérieures d'une vache est nettement supérieure à celle entre les deux pieds d'un homme à l'arrêt.
Le danger est donc plus grand pour la vache que pour l'homme.