Devoir non surveillé n°05 (pour le jeudi 17 décembre)

Pouvoir des pointes

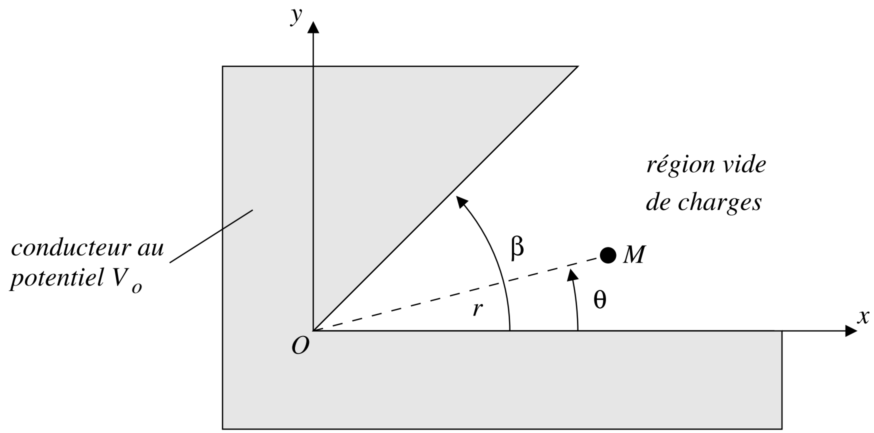
Au voisinage de pointes électriques, le champ électrique est particulièrement intense, on parle de « pouvoir des pointes ».
Dans l'air, si la valeur du champ électrique dépasse la valeur du champ disruptif de l'ordre de $E_d \approx 3 \times 10^6\ \mathrm{V} \cdot \mathrm{m}^{-1}$, les molécules s'ionisent.
Lors d'une tempête orageuse, en présence d'une forte différence de potentiel entre les nuages et le sol, la décharge se produira plus favorablement au voisinage d'un conducteur de forme pointue relié au sol.

Ce concept est mis à profit dans les paratonnerres. « Le paratonnerre n'attire pas la foudre mais rend plus probable, grâce à l'effet de pointe, le parcours d'un claquage du diélectrique que constitue l'atmosphère. Ce claquage suit un parcours souvent initié par un précurseur. Le paratonnerre captera donc la foudre dans sa zone d'influence (zone de protection), mais les éclairs qui auraient eu tendance à tomber en dehors de cette zone continueront à le faire » (Wikipédia). Ci-contre, la tour Eiffel heurtée par la foudre, 3 juin 1902, 21h20.

Dans la suite du problème, on s'intéresse aux caractéristiques du potentiel électrique et du champ électrostatique au voisinage d'un coin ou d'une pointe. On considère un problème plan (invariant selon la direction Oz) dans lequel deux conducteurs plans portés au potentiel V_0 s'interceptent avec un angle β. Le coin correspond à : $0 < \beta < \pi$, la pointe à : $\pi < \beta < 2\pi$. On adopte un système de coordonnées cylindriques et on cherche à déterminer le potentiel dans le domaine $r \in]0, +\infty[$ et $\theta \in]0, \beta[$.

On rappelle l'expression de l'opérateur laplacien en coordonnées cylindriques pour une fonction $\Phi(r, \theta, z)$:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$



Dans toute la suite, on ne cherche le potentiel que dans un voisinage de l'origine, la valeur du potentiel à grande distance étant imposée par des conditions aux limites sans intérêt pour le problème posé. En particulier, on ne cherchera pas à étudier les conséquences des conditions aux limites du type $r \to +\infty$.

1. Justifier que le potentiel électrostatique V ne dépende pas de la coordonnées z.

   Pour la suite, on cherche une solution sous la forme : $V(r, \theta) = V_0 + f(r)g(\theta)$.

2. Montrer que $g''(\theta) = cste \times g(\theta)$ et $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\dfrac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r}\right) = -cste \times \dfrac{f(r)}{r}$, avec $cste$ une constante.

   Par la suite, on considère uniquement le cas : $cste = -\nu^2$, avec $\underline{\nu \text{ un réel positif}}$.

3. Montrer que les fonctions f et g sont de la forme :

$$\forall r \in]0, +\infty[\,,\ f(r) = ar^{\nu} + br^{-\nu} \quad \text{et} \quad \forall \theta \in]0, \beta[\,,\ g(\theta) = A\cos(\nu\theta) + B\sin(\nu\theta)$$

4. En utilisant des conditions aux limites pertinentes, simplifier les expressions obtenues pour f et g et montrer en particulier que $\nu = \dfrac{m\pi}{\beta}$ avec m un entier positif.

5. Montrer que la solution la plus générale peut alors se mettre sous la forme :

$$\forall r \in [0, +\infty[\,,\ \forall \theta \in]0, \beta[\,,\quad V(r, \theta) = V_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m r^{m\pi/\beta} \sin\left(\frac{m\pi\theta}{\beta}\right)$$

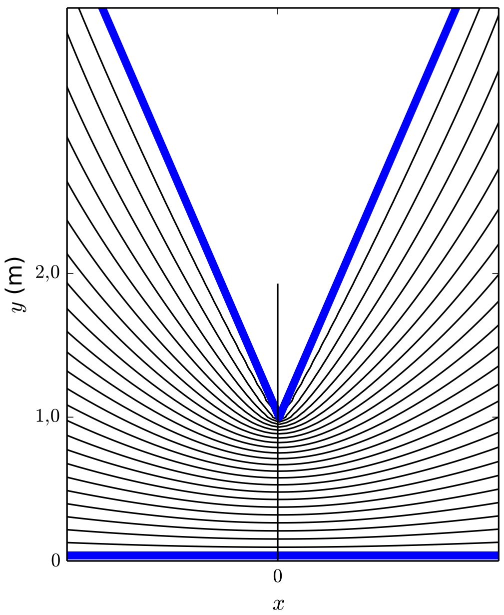
   avec a_m des constantes indéterminées à ce stade.
   Pour des points suffisamment « voisins » de l'origine, le premier terme du développement en loi de puissance domine (on le supposera non nul) et le potentiel prend la forme simplifiée :

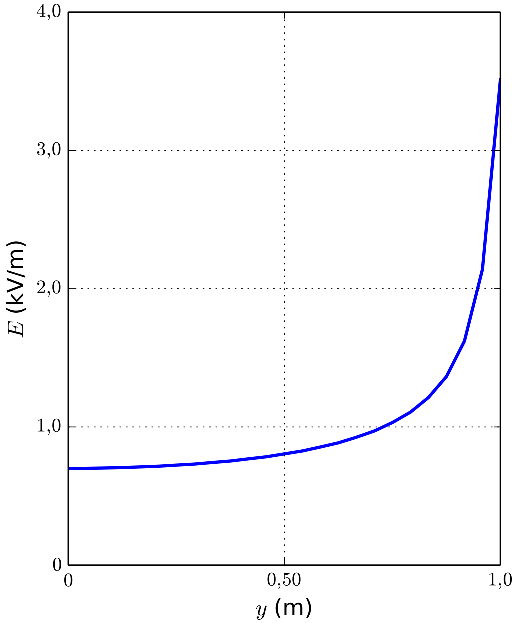
$$V(r, \theta) \approx V_0 + a_1 r^{\pi/\beta} \sin\left(\frac{\pi\theta}{\beta}\right)$$

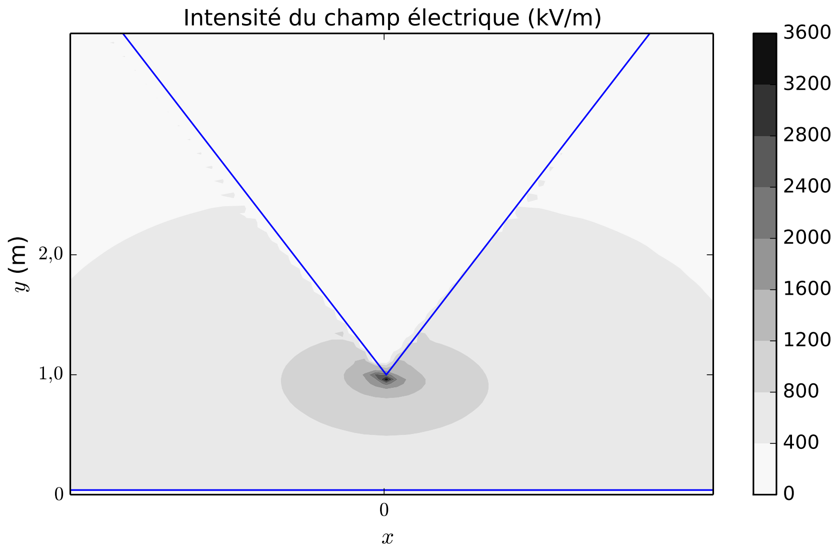
6. En déduire les composantes du champ électrique.

7. Que constate-t-on pour $E_\theta(r,\beta/2)$, $E_r(r,0)$, $E_r(r,\beta)$?
   Montrer que l'on peut retrouver ces résultats sans calcul.
8. On considère le cas d'une pointe : $\pi < \beta < 2\pi$. Que dire, dans ce cas, de $\lim\limits_{r\to 0} \|\vec{E}\|$?
   Commenter ce résultat en lien avec l'introduction.

   Les graphiques suivants présentent la forme des équipotentielles et la norme du champ le long de l'axe de symétrie (Oy) lorsqu'on place une pointe conductrice au potentiel électrostatique $V_0 = 1,0$ kV à une distance $d = 1,0$ m d'un plan conducteur au potentiel nul.







   Ci-contre, à titre d'information, la figure donne l'intensité du champ électrique dans le domaine étudié.

9. Commenter les courbes.