

Devoir non surveillé n°04 (correction)

1. Une particule de fluide est un « petit » volume de fluide de masse fixée. La particule de fluide doit avoir une taille caractéristique grande vis à vis du libre parcours moyen des particules microscopiques, elle contient alors un grand nombre de particules et on peut effectuer des moyennes statistiques permettant de définir localement masse volumique, température, pression, champ des vitesses... Par ailleurs la particule de fluide doit avoir une taille faible à l'échelle macroscopique du système, permettant d'observer les variations des grandeurs précitées au sein du système.

Dans le cas de la citerne, une particule de volume 1 mm^3 convient.

La relation de Bernoulli est associée à une conservation de l'énergie mécanique volumique le long d'une ligne de courant ; dans sa formulation habituelle, elle nécessite :

- un référentiel galiléen et un axe vertical orienté vers le haut ;
- un écoulement incompressible et homogène, permanent et parfait ;
- l'absence d'échanges avec l'extérieur, en pratique l'absence de pièces mobiles (hélice,...) et d'échangeurs thermiques.

2. Le débit volumique D_v et la durée de remplissage τ permettent de déterminer le volume versé qu'il est alors facile de relier à la hauteur h_0 :

$$D_v \times \tau = L^2 \times h_0 \Leftrightarrow h_0 = \frac{D_v \times \tau}{L^2}$$

Application numérique : $h_0 = \frac{6,6 \times 10^{-3} \times 89}{(0,95)^2} \Rightarrow h_0 = 0,65 \text{ m}$.

3. À la suite du versement d'une hauteur h_0 d'eau, le champ de pression dans le réservoir est : $p(z) = p_0 + \rho_0 g(h_0 - z)$. En pratique, la pression p_0 s'exerce à l'extérieur et il suffira donc de tenir compte de la surpression.

Considérons la force de pression sur la face yOz ; pour un élément de surface de longueur L et de hauteur dz , le terme de surpression contribue à une force élémentaire :

$$\delta \vec{F} = \rho_0 g(h_0 - z)Ldz \vec{u}_x$$

Ce qui donne la résultante de la force par intégration :

$$\vec{F} = L\rho_0 g \int_{z=0}^{h_0} (h_0 - z) dz \vec{u}_x \Rightarrow \vec{F} = \frac{\rho_0 g L h_0^2}{2} \vec{u}_x$$

Application numérique :

$$F = 1,0 \times 10^3 \times 9,81 \times 0,95 \times \frac{0,65^2}{2} \Rightarrow F = 2,0 \times 10^3 \text{ N}$$

4. Commençons par déterminer le moment résultant toujours sur la face yOz . Pour un élément de surface de longueur L et de hauteur dz , le terme de surpression contribue à une force élémentaire :

$$\delta \vec{F} = \rho_0 g(h_0 - z)Ldz \vec{u}_x$$

Cette force génère un moment élémentaire :

$$\delta \vec{M}_0 = z \vec{u}_z \wedge \delta \vec{F} \Rightarrow \delta \vec{M}_0 = \rho_0 g L z (h_0 - z) dz \vec{u}_y$$

Ce qui donne par intégration :

$$\vec{M}_0 = \int_0^{h_0} \delta \vec{M}_0 \Rightarrow \vec{M}_0 = \rho_0 g L \frac{h_0^3}{6} \vec{u}_y$$

Par définition du centre de poussée $\|\vec{M}_0\| = OC \times \|\vec{F}\|$, on en déduit :

$$OC = \frac{h_0}{3}$$

La pression augmentant avec la profondeur, le centre de poussée est logiquement plus proche du fond du réservoir que de la surface libre.

5. Hors-programme.
6. On applique la relation des gaz parfaits pour les deux températures :

$$p_0 V_0 = nRT_0 \quad \text{et} \quad p_i V_0 = nRT_i \Rightarrow p_i = p_0 \frac{T_i}{T_0}$$

Application numérique :

$$p_i = \frac{1013 \times (273 + 40)}{288} \Rightarrow p_i = 1,10 \times 10^3 \text{ hPa}$$

Le bouchon étant fermé, au fil de la vidange le volume augmente dans la partie supérieure, ce qui entraîne une diminution de la pression de l'air. Lorsque l'équilibre est atteint, la loi de l'hydrostatique est à nouveau applicable et la pression de l'air du réservoir additionnée de la surpression liée à la colonne d'eau est égale à la pression au niveau du point de vidange, c'est à dire la pression atmosphérique. Ceci s'écrit :

$$p_f + \rho_0 g h = p_0$$

De plus l'évolution isotherme au sein de l'air impose :

$$p_f = \frac{p_i V_i}{V_f} = p_i \times \frac{L^2 \times (H - h_0)}{L^2 \times (H - h)}$$

C'est à dire en combinant, les deux équations :

$$p_i \times \frac{(H - h_0)}{(H - h)} + \rho_0 g h = p_0 \Leftrightarrow p_i (H - h_0) + \rho_0 g h (H - h) = p_0 \times (H - h)$$

$$\Leftrightarrow \rho_0 g h^2 - h \times (\rho_0 g H + p_0) + H \times (p_0 - p_i) + p_i h_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{h^2 - h \times \left(H + \frac{p_0}{\rho_0 g}\right) + \frac{1}{\rho_0 g} [H \times (p_0 - p_i) + p_i h_0] = 0}$$

Application numérique : l'équation précédente s'écrit numériquement

$$h^2 + 11,03 \times h + 6,67 = 0 \Rightarrow \boxed{h \simeq 64 \text{ cm}}$$

Le volume d'eau vidangé s'obtient alors *via* la baisse du niveau :

$$V_d = L^2 \times (h_0 - h) = 0,95^2 \times 0,01 \Rightarrow \boxed{V_d \simeq 9 \text{ L}}$$

Enfin la pression finale s'obtient en considérant toujours une évolution isotherme :

$$p_f = 1100 \times \left(\frac{70 - 65}{70 - 64}\right) \Rightarrow \boxed{p_f = 0,92 \text{ bar}}$$

En considérant un bouchon de 10 cm de rayon, la différence de pression entre l'intérieur et l'extérieur correspond à une résultante de force :

$$F = (1013 - 920) \times 10^2 \times \pi \times 0,1^2 \approx 3 \times 10^2 \text{ N}$$

Ouvrir le réservoir nécessite d'exercer une force correspondant au soulèvement d'une masse de 30 kg et **il peut devenir difficile d'ouvrir le réservoir.**

7. Le fluide étant incompressible, cela impose $\text{div}(\vec{v}) = 0$, c'est à dire, dans le cas présent :

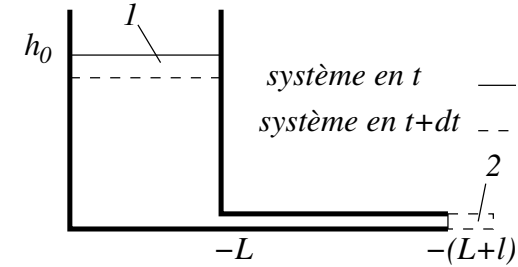
$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$$

Le champ des vitesses est indépendant de x et l'écoulement s'effectue vers les $x < 0$, donc : $\boxed{\vec{v}(x, t) = -v(t)\vec{e}_x}$.

8. On applique un bilan d'énergie mécanique entre t et $t + dt$ pour le système fermé représenté sur le schéma. Les grandeurs en entrée sont indicées par (1) et les grandeurs en sortie par (2), la partie commune étant dénommée Σ . Il faut prendre garde que le régime n'est pas permanent et que le terme commun ne se simplifie pas.

$$d(E_c + E_p) = P_{nc} dt$$

En négligeant les phénomènes de dissipation, les forces non conservatives s'identifient aux forces de pression en amont et en aval, avec $S = L^2$ la section du réservoir :



$$P_{nc} = p_0 S v_1 - p_0 s v_2 = p_0 \underbrace{(S v_1 - s v_2)}_{\text{incompressibilité}} = 0$$

Pour le terme de gauche :

$$d(E_c + E_p) = (\delta E_{c,2} - \delta E_{c,1}) + dE_{c,\Sigma} + (\delta E_{p,2} - \delta E_{p,1})$$

Exprimons chacun des termes :

— la hauteur d'eau restant quasiment fixée à h_0 (section large en entrée), on peut négliger l'énergie cinétique de la zone (1), et identifier l'énergie cinétique de la zone (2) à la petite quantité de fluide qui sort à la vitesse $v(t + dt)$:

$$\delta E_{c,2} - \delta E_{c,1} \simeq \frac{1}{2} \delta m \times v^2(t + dt) - 0 \simeq \frac{1}{2} \underbrace{\delta m v^2(t)}_{\text{ordre 1}} = \frac{1}{2} \rho_0 v s dt v^2$$

— la variation d'énergie potentielle correspond au passage de la masse vidangée pendant dt de l'altitude $z = h_0$ à $z = 0$:

$$\delta E_{p,2} - \delta E_{p,1} = -\delta m g h_0 = -\rho_0 v s dt g h_0$$

— la vitesse évoluant avec le temps, l'énergie cinétique de la partie Σ varie pendant dt ; la hauteur h_0 étant quasi-constante, on peut supposer que le champ de vitesse varie peu dans le réservoir pendant dt , de plus, compte tenu de la différence de section, on peut supposer que les vitesses dans le réservoir sont très faibles devant la vitesse dans le tuyau. En conséquence, on ne considère que la variation d'énergie cinétique dans le tuyau :

$$dE_{c,\Sigma} \simeq dE_{c,\text{tuyau}} = d\left(\frac{1}{2} m_{\text{tuyau}} v^2\right) = \frac{1}{2} \rho_0 s l d(v^2)$$

En regroupant les termes, on en déduit :

$$\frac{1}{2} \rho_0 v s dt v^2 + \frac{1}{2} \rho_0 s l d(v^2) - \rho_0 v s dt g h_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}v^2 dt + l dv - gh_0 dt = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{l \frac{dv}{dt} + \frac{v^2}{2} = gh_0}$$

9. La solution constante vérifie : $v_0^2 = 2k^2$, on peut donc retenir la solution positive : $\boxed{v_0 = \sqrt{2k}}$. Avec $u = v + v_0$, on obtient :

$$\begin{aligned} \ell \frac{du}{dt} + \frac{1}{2}(u - v_0)^2 = k^2 &\Leftrightarrow \ell \frac{du}{dt} + \frac{1}{2}(u^2 - 2uv_0 + v_0^2) = k^2 \\ \Leftrightarrow \ell \frac{du}{dt} + \frac{1}{2}(u^2 - 2uv_0) = 0 \end{aligned}$$

À l'aide du changement de variables proposé dans l'énoncé :

$$\frac{-\ell dw}{w^2 dt} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{w^2} - \frac{2v_0}{w} \right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dw}{dt} = \frac{1}{2\ell} (1 - 2wv_0)$$

Par séparation des variables, on intègre entre l'instant initial et un instant quelconque :

$$\int_{w_0}^w \frac{dw}{1 - 2wv_0} = \int_{t=0}^t \frac{1}{2\ell} dt' \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2v_0} \left[\ln \left(\frac{1 - 2wv_0}{1 - 2w_0v_0} \right) \right] = \frac{t}{2\ell}$$

La condition initiale $v(t=0) = 0$ impose $u(0) = v_0$ et $w(0) = w_0 = 1/v_0$, en conséquence :

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{1 - 2v_0/u}{1 - 2v_0/v_0} \right) = -\frac{v_0 t}{\ell} &\Leftrightarrow \ln \left(\frac{2v_0}{u} - 1 \right) = -v_0 t / \ell \\ \Leftrightarrow \frac{2v_0}{u} = 1 + \exp \left(-\frac{v_0 t}{\ell} \right) &\Leftrightarrow u(t) = \frac{2v_0}{1 + \exp \left(-\frac{v_0 t}{\ell} \right)} \end{aligned}$$

Comme $\frac{\ell}{v_0} = \frac{\ell}{\sqrt{2k}} = \tau$ et $v(t) = u(t) - v_0$, on obtient :

$$v(t) = \frac{2v_0}{1 + e^{-t/\tau}} - v_0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{v(t) = v_0 \times \frac{1 - e^{-t/\tau}}{1 + e^{-t/\tau}}}$$

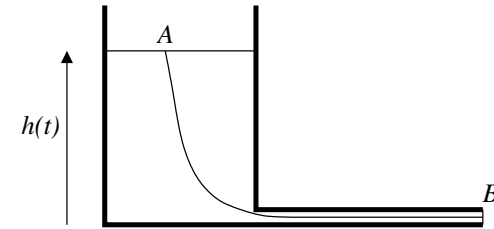
Pour $t \rightarrow +\infty$, $\boxed{v(t) \rightarrow v_1 = v_0}$. Notons toutefois que ceci correspond à une durée de quelques τ tout en préservant l'hypothèse $h(t) \simeq h_0$.

$$10. \tau = \frac{0,80}{\sqrt{2 \times 9,81 \times 0,65}} \Rightarrow \boxed{\tau = 0,22 \text{ s}}$$

On cherche alors t_0 tel que $\frac{v_0 - v(t_0)}{v_0} = \frac{1}{100}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{100} = \frac{v_0 - v(t_0)}{v_0} = 1 - \frac{1 - e^{-t_0/\tau}}{1 + e^{-t_0/\tau}} = \frac{2}{1 + e^{-t_0/\tau}} \\ \Leftrightarrow t_0 = \tau \times \ln(199) \Rightarrow \boxed{t_1 = 1,2 \text{ s}} \end{aligned}$$

11. L'écoulement est supposé incompressible et parfait ; la section du réservoir étant très grande devant la section du tuyau, et le régime transitoire passé, on fait l'hypothèse d'un régime quasi-stationnaire pour appliquer la relation de Bernoulli sur une ligne de courant allant de A à B :



$$\frac{v_A^2}{2} + gz_A + \frac{p_A}{\rho_0} = \frac{v_B^2}{2} + gz_B + \frac{p_B}{\rho_0}$$

L'entrée et la sortie étant à l'air libre $p_A = p_B = p_0$, de plus comme $S \gg s$, on peut supposer $v_A \ll v_B$, en conséquence :

$$v_B = \sqrt{2gh(t)}$$

Pendant une durée dt , un volume $v_B s dt$ d'eau est vidangé en sortie, ce qui correspond à une variation de volume dans le réservoir de $-L^2 dh$ (avec $dh < 0$), on en déduit :

$$-L^2 dh = v_B s dt = \sqrt{2gh} \times s dt \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dh}{\sqrt{2gh}} = \frac{-s}{L^2} dt$$

On intègre alors la relation de l'instant initial, $t = 0$ (en toute rigueur $t = t_1$) associé à une hauteur $h = h_0$, à l'instant final $t = t_v$ et $h = 0$:

$$\int_{h_0}^0 \frac{dh}{\sqrt{2gh}} = -\frac{s}{L^2} \int_0^{t_v} dt \quad \Leftrightarrow \quad t_v = \sqrt{\frac{2h_0}{g}} \times \frac{L^2}{s}$$

$$\text{Avec } s = \pi \delta^2 / 4, \quad \boxed{t_v = \sqrt{\frac{2h_0}{g}} \times \frac{4L^2}{\pi \delta^2}}$$

Application numérique :

$$t_v = \sqrt{\frac{2 \times 0,65}{9,81}} \times \frac{4 \times 0,95^2}{\pi \times 0,020^2} = 1046 \text{ s} \Rightarrow \boxed{t_v \simeq 17 \text{ min}}$$

Comme $t_v \gg t_0$, cela justifie, *a posteriori* le fait d'avoir supposé $h(t) \simeq h_0$ durant le régime transitoire.

12. Pour un écoulement permanent, le premier principe industriel pour l'eau entre l'entrée et la sortie du dispositif s'écrit :

$$\rho D_v \times \Delta(h + e_c + e_p) = (\mathcal{P}_{th} + \mathcal{P}_{mca,utile})$$

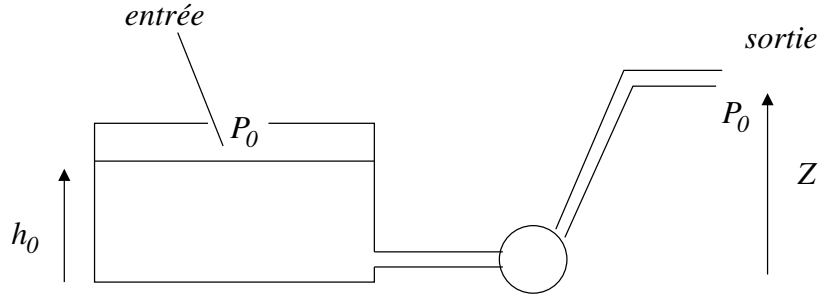
En négligeant les phénomènes dissipatifs et les échanges thermiques, $\mathcal{P}_{th} = 0$ et $\mathcal{P}_{mca,utile} = \mathcal{P}$ la puissance de la pompe.

De plus pour un fluide incompressible dont on néglige les variations thermiques : $\Delta h = \Delta u + \frac{\Delta p}{\rho} \simeq \frac{\Delta p}{\rho}$.

Au final, avec un axe vertical orienté vers le haut :

$$\rho D_v \times \Delta \left[\frac{v_s^2 - v_e^2}{2} + g(z_s - z_e) + \frac{p_s - p_e}{\rho} \right] = \mathcal{P}$$

13. On applique le premier principe industriel entre le sommet du réservoir et la sortie de la lance à incendie. L'entrée et la sortie étant à l'air libre, la pression est égale à P_0 .

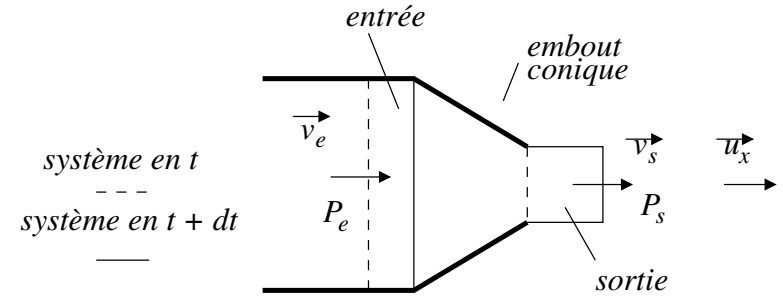


La grande différence de section entre l'entrée et la sortie permet de négliger la vitesse en entrée vis à vis de la vitesse en sortie, on en déduit :

$$\mathcal{P} = \rho D_v \times \left[g(Z - h_0) + \frac{v_s^2}{2} \right] = \rho D_v \left[g(Z - h_0) + \frac{8D_v^2}{\pi^2 d_s^4} \right]$$

La résolution numérique de cette équation conduit à $D_v = 3,0 \text{ L} \cdot \text{s}^{-1}$. Cette valeur trouvée est cohérente avec le débit fourni à la question 16.

14. On considère le système compris à l'instant t dans la zone en pointillé et à l'instant $t + dt$ dans la zone en trait plein. On effectue un bilan de quantité de mouvement en projection sur l'axe Ox .



$$d\vec{p} = \vec{F}_{ext} dt = \left[\vec{F}_{embout \rightarrow eau} + \vec{F}_{pression} \right] dt$$

On commence par évaluer le membre de gauche en régime permanent :

$$d\vec{p} = \delta\vec{p}_s - \delta\vec{p}_e = \delta m \times (v_s - v_e) \vec{u}_x = \rho_0 D_v dt (v_s - v_e) \vec{u}_x$$

Il reste à évaluer les force de pression :

$$\vec{F}_{pression} = \left[P_e \times \frac{\pi d_e^2}{4} - P_s \times \frac{\pi d_s^2}{4} \right] \vec{u}_x$$

En sortie le fluide est à l'air libre : $P_s = P_0$. On détermine la pression d'entrée à l'aide de la relation de Bernoulli :

$$P_0 + \frac{\rho_0 v_s^2}{2} = P_e + \frac{\rho_0 v_e^2}{2} \Leftrightarrow P_e = P_0 + \frac{\rho_0 v_s^2}{2} - \frac{\rho_0 v_e^2}{2}$$

On en déduit :

$$\rho_0 D_v (v_s - v_e) \vec{u}_x = \vec{F}_{embout \rightarrow eau} + \frac{\pi P_0}{4} (d_e^2 - d_s^2) \vec{u}_x + \frac{\pi \rho_0 d_e^2}{8} \times (v_s^2 - v_e^2) \vec{u}_x$$

C'est-à-dire :

$$\vec{F}_{eau \rightarrow embout} = \left[-\rho_0 D_v (v_s - v_e) + \frac{\pi P_0}{4} (d_e^2 - d_s^2) + \frac{\pi \rho_0 d_e^2}{8} \times (v_s^2 - v_e^2) \right] \vec{u}_x$$

Application numérique avec $D_v = 3,0 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$,

$$v_s = \frac{4D_v}{\pi d_s^2} = 19,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, v_e = \frac{4D_v}{\pi d_e^2} = 3,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \text{ on en déduit}$$

$$F_{eau \rightarrow embout} = 1,7 \times 10^2 \text{ N}$$

15. On applique la relation fondamentale de la dynamique pour la particule de fluide soumise uniquement à son poids dans le référentiel \mathcal{R}' , ce qui donne en projection :

$$\ddot{z}' = -g \quad \text{et} \quad \ddot{x}' = 0$$

Par intégration et compte tenu des conditions initiales :

$$z'(t) = -gt^2/2 + v_s \sin(\alpha) \times t + z'_0 \quad \text{et} \quad x'(t) = v_s \cos(\alpha) \times t$$

C'est à dire pour l'équation de la trajectoire :

$$z'(x') = -\frac{gx'^2}{2v_s^2 \cos^2(\alpha)} + \tan(\alpha)x' + z'_0$$

16. Avec un diamètre de sortie d_2 , le débit impose une vitesse de sortie v_s :

$$v_s = \frac{4D_v}{\pi d_2^2} = \frac{4 \times 0,180/60}{\pi \times 0,014^2} = 19,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Avec une vitesse de sortie v_s , la conservation de l'énergie mécanique indique que l'altitude maximale qui peut être atteinte dans le cas d'un jet vertical est :

$$h_{max} = \frac{v_s^2}{2g} \simeq \frac{19,5^2}{2 \times 9,81} \Rightarrow h_{max} \simeq 19 \text{ m}$$

$z'_0 = 1 \text{ m}$ apparaît alors comme une faible correction à la trajectoire qui devient :

$$z'(x') = -\frac{gx'^2}{2v_s^2 \cos^2(\alpha)} + \tan(\alpha)x'$$

La portée maximale x'_{max} est associée à $z'(x'_{max}) = 0$, c'est à dire :

$$0 = -\frac{gx'_{max}^2}{2v_s^2 \cos^2(\alpha)} + \tan(\alpha)x'_{max} \Rightarrow x'_{max} = \frac{v_s^2}{g} \sin(2\alpha)$$

On retrouve alors que le résultat classique que la portée est maximale pour $\alpha = 45^\circ$ de valeur :

$$x'_{max} = \frac{19,5^2}{9,81} \Rightarrow x'_{max} \simeq 39 \text{ m}$$

Une résolution exacte est possible mais assez technique. La portée maximale x'_{max} est associée à $z'(x'_{max}) = 0$, c'est à dire :

$$0 = -\frac{gx'_{max}^2}{2v_s^2} [1 + \tan^2(\alpha)] + \tan(\alpha)x'_{max} + z'_0$$

$$\Leftrightarrow 0 = -\frac{gx'_{max}^2}{2v_s^2} \times (1 + u^2) + u \times x'_{max} + z'_0 \quad \text{avec} \quad u = \tan(\alpha) \quad (*)$$

La portée maximale est, toutes choses égales par ailleurs, une fonction de l'angle α , donc : $x'_{max} = x'_{max}(u)$. Différencions alors l'expression par rap-

port à u et déterminons u_0 tel que $dx'_{max}/du = 0$:

$$0 = -\frac{g}{2v_s^2} \times 2x'_{max} \underbrace{\frac{dx'_{max}}{du}}_{=0} (1 + u^2) - \frac{gx'_{max}^2}{2v_s^2} \times 2u_0 + x'_{max} + u_0 \times \underbrace{\frac{dx'_{max}}{du}}_{=0}$$

$$\Leftrightarrow u_0 = \frac{v_s^2}{gx'_{max}}$$

En reportant dans (*), on en déduit :

$$0 = -\frac{gx'_{max}^2}{2v_s^2} \left(1 + \left(\frac{v_s^2}{gx'_{max}} \right)^2 \right) + \frac{v_s^2}{gx'_{max}} \times x'_{max} + z'_0$$

$$\Leftrightarrow x'_{max}^2 = \frac{2v_s^2}{g} \left(\frac{v_s^2}{2g} + z'_0 \right) = \frac{v_s^4}{g^2} \left(1 + \frac{2gz'_0}{v_s^2} \right)$$

On en déduit :

$$x'_{max} = \frac{v_s^2}{g} \times \sqrt{1 + \frac{2gz'_0}{v_s^2}} \quad \text{et} \quad u_0 = \tan(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2gz'_0}{v_s^2}}}$$

Application numérique :

$$x'_{max} = \frac{19,5^2}{9,81} \times \sqrt{1 + \frac{2 \times 9,81 \times 1}{19,5^2}} \Rightarrow x'_{max} = 40 \text{ m}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2 \times 9,81 \times 1}{19,5^2}}} = 0,975 \Rightarrow \alpha \simeq 44^\circ$$

Notons que les formules exactes diffèrent de la formule approchée *via* le terme $2gz'_0/v_s^2 = z'_0/h_{max} \simeq 0,05$.