Devoir non surveillé n°03 (correction, extrait CCP MP 2015)

1. Par définition la puissance thermique est le flux du vecteur courant à travers la surface latérale :
$$P_{th} = \iint \vec{j}_Q.d\vec{S} = \iint j_Q\vec{u}_r.dS\vec{u}_r = \iint j_Q dS = j_Q \iint dS = j_Q \times S_{lat}$$
Dans l'intégrale, on peut sortir la composante du vecteur courant qui est la même en tout point de la surface latérale. La surface latérale est simplement l'aire latérale du cylindre, donc :
$$P_{th} = j_Q \times 2\pi r_i \times L \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_{th} = h(T_i - T_0) \times 2\pi r_i \times L}$$

2. En remplaçant l'indice i par l'indice e, on en déduit :
$$\boxed{P_{th,isolant} = h(T_e - T_0) \times 2\pi r_e \times L}$$

3. <u>Étude thermique au sein de l'isolant</u> :

   (a) En régime permanent et en l'absence de sources intérieures, le flux entrant en r doit nécessairement sortir en $r + dr$, mathématiquement :
$$\boxed{\frac{dP_{cond}(r)}{dr} = 0}$$

   (b) Il n'y a pas d'accumulation d'énergie au niveau de la surface extérieure de l'isolant, on donc $P_{th,isolant} = P_{cond}(r_e^-)$.
Comme la puissance de conduction est indépendante de r, on en déduit plus généralement :
$$\boxed{P_{cond}(r) = P_{th,isolant}}$$

   (c) <u>Loi de Fourier</u> : $\vec{j}_{cond} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$.
Dans le cas d'une conduction radiale : $\vec{j}_{cond} = -\lambda \dfrac{dT}{dr}\vec{u_r}$.
La puissance thermique associée est le flux du vecteur courant à travers la surface latérale :
$$P_{cond}(r) = j_{cond}(r) \times 2\pi r \times L \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_{cond}(r) = -\lambda \frac{dT}{dr} \times 2\pi r \times L}$$

   (d) Avec $P_{th,isolant} = P_{cond}(r)$, on obtient :
$$h(T_e - T_0) \times 2\pi r_e \times L = -\lambda \frac{dT}{dr} \times 2\pi r \times L$$
$$\boxed{\frac{dT}{dr} = \frac{hr_e(T_0 - T_e)}{\lambda r}}$$

   (e) On intègre alors l'expression précédente selon :
$$T(r) = \frac{hr_e(T_0 - T_e)}{\lambda} \ln r + cste$$
Compte tenu de la condition aux limites $T(r_i) = T_i$:
$$T_i = \frac{hr_e(T_0 - T_e)}{\lambda} \ln r_i + cste \quad \Rightarrow \quad \boxed{T(r) = T_i + \frac{hr_e(T_0 - T_e)}{\lambda} \ln\left(\frac{r}{r_i}\right)}$$

   (f) On applique la relation pour $r = r_e$:
$$T_e = T_i + \frac{hr_e(T_0 - T_e)}{\lambda} \ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)$$
$$T_e \left[1 + \frac{hr_e}{\lambda} \ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)\right] = (T_i - T_0) + T_0 \left[1 + \frac{hr_e}{\lambda} \ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)\right]$$
En conclusion : $\boxed{T_e = T_0 + \dfrac{T_i - T_0}{1 + \dfrac{hr_e}{\lambda} \ln\left(\dfrac{r_e}{r_i}\right)}}$

4. On utilise les expressions précédemment obtenues :
$$\frac{P_{th}}{P_{th,isolant}} = \frac{T_i - T_0}{T_e - T_0}\frac{r_i}{r_e} = \frac{r_i}{r_e}\left[1 + \frac{hr_e}{\lambda} \ln \frac{r_e}{r_i}\right] = \frac{r_i}{r_e} + \frac{hr_i}{\lambda} \ln \frac{r_e}{r_i}$$
C'est à dire :
$$\frac{P_{th}}{P_{th,isolant}} = \frac{1}{x} + \alpha \ln x \quad \text{avec} \quad \boxed{\alpha = hr_i/\lambda}$$

5. <u>Choix de l'isolant</u> : notons que $x = r_e/r_i$ donc $\underline{x \geq 1}$.

   (a) Pour $x \geq 1$, on constate que $\dfrac{P_{th}}{P_{th,isolant}} \geq 1$, c'est à dire $P_{th,isolant} \leq P_{th}$, la présence de polyuréthane limite le transfert thermique, **il est donc toujours efficace d'isoler avec le polyuréthane**.

   (b) Dans le cas du plâtre, la condition $P_{th,isolant} \leq P_{th}$ impose $\boxed{r_e \geq 60 r_i}$.

   (c) L'étude de la fonction $x \to 1/x + \alpha \ln(x)$ conduit à :
$$\left(\frac{1}{x} + \alpha \ln(x)\right)' = -\frac{1}{x^2} + \frac{\alpha}{x} = \frac{1}{x}\left(\alpha - \frac{1}{x}\right)$$
La fonction tendant vers $+\infty$ pour $x \to 0$ et $x \to +\infty$, l'annulation de la dérivée correspond bien à un minimum, avec $\boxed{x_m = 1/\alpha}$.

   (d) La condition précédente se réécrit : $x_m = \dfrac{\lambda_2}{hr_i}$, c'est à dire $\lambda_2 = x_m h r_i$.

   <u>Application numérique</u> : graphiquement $x_m \simeq 4,2$,
$$\lambda_2 = 4,2 \times 3 \times 2 \times 10^{-2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda_2 = 0,25\ \text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}}$$