

Devoir non surveillé n°03 (correction)**Les fusibles électriques****1 Conduction dans les métaux**

1. Chaque élément aluminium libère trois électrons de conduction :

$$n_{Al} = 3 \times \frac{\mu_{Al}}{m_{Al}} \Rightarrow n_{Al} = \frac{3\mu_{Al}N_A}{M_{Al}}$$

Application numérique :

$$n_{Al} = \frac{3 \times 2,6989 \times 6,02 \times 10^{23}}{27} \Rightarrow n_{Al} = 1,8 \times 10^{23} \text{ électrons} \cdot \text{cm}^{-3}$$

2. Évaluons le rapport entre le poids et la force électrique pour un électron :

$$\frac{mg}{eE} = \frac{9,1 \times 10^{-31} \times 10}{1,6 \times 10^{-19} \times 10} = 5,7 \times 10^{-12} \ll 1$$

On applique la relation fondamentale de la dynamique à un électron libre qui, entre deux chocs, n'est soumis qu'à la force électrique :

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}$$

3. La vitesse \vec{v}_0 étant d'orientation et de norme aléatoires, elle se moyenne à zéro sur un grand nombre de chocs.

4. On prend comme origine des temps le dernier choc ayant eu lieu et on intègre la relation précédente :

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 - \frac{e\vec{E}}{m_e}t$$

On moyenne ensuite sur un grand nombre de chocs pour obtenir en projection sur l'axe B_x :

$$\langle v_x \rangle = -\frac{eE\tau}{m_e} = -\frac{e\tau}{m_e} \times \frac{U}{L}$$

5. Connaissant la vitesse moyenne on en déduit le vecteur courant, ce qui permet d'identifier la conductivité électrique :

$$j_x = -en \langle v_x \rangle = \frac{e^2 n \tau}{m_e} \times \frac{U}{L} = \sigma \times \frac{U}{L} \Rightarrow \sigma = \frac{ne^2 \tau}{m_e}$$

Cette grandeur s'exprime en **siemens par mètre** ($S \cdot m^{-1}$) dans le système international d'unités.

6. Application numérique :

$$\tau_{Al} = \frac{m_e \times \sigma_{Al}}{n_{Al} e^2} = \frac{9,1 \times 10^{-31} \times 3,77 \times 10^7}{1,8 \times 10^{29} \times (1,6 \times 10^{-19})^2} \Rightarrow \tau_{Al} = 7,6 \times 10^{-15} \text{ s}$$

7. En prenant comme précédemment $10 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ pour le champ électrique :

$$|\langle v_x \rangle| = \frac{eE\tau_{Al}}{m_e} = \frac{1,6 \times 10^{-19} \times 10 \times 7,6 \times 10^{-15}}{9,1 \times 10^{-31}} \Rightarrow |\langle v_x \rangle| \approx 1,4 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$$

La vitesse thermique est de l'ordre de :

$$v_{th} \approx \sqrt{\frac{3k_B T}{m_e}} = \sqrt{\frac{3 \times 1,38 \times 10^{-23} \times 298}{9,11 \times 10^{-31}}} \Rightarrow v_{th} = 1,2 \times 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

On constate que $v_{th} \gg |\langle v_x \rangle|$, cependant, pour un électron, les vitesses suivant un choc et associées à la vitesse thermique se moyennent à zéro sur un grand nombre de chocs ; au final seule la vitesse moyenne contribue au **déplacement d'ensemble** des électrons.

8. Connaissant la vitesse thermique et la durée caractéristique entre deux chocs, on en déduit le libre parcours moyen :

$$\langle \ell \rangle = |\langle v_x \rangle| \times \tau_{Al} = 1,2 \times 10^5 \times 7,6 \times 10^{-15} \Rightarrow \langle \ell \rangle \approx 1 \text{ nm}$$

En pratique, dans le modèle de Drude, les chocs se font sur les ions du réseau et le libre parcours moyen devrait être de l'ordre de cette distance. Cependant la distance entre les ions du réseau est plutôt de l'ordre de 10^{-10} m , le libre parcours moyen semble 10 fois trop grand.

En pratique, les chocs ne sont pas le fait du réseau lui-même mais des imperfections du réseau : imperfections de structure (lacunes, ...) et imperfection due à la vibration des atomes du réseau autour de leur position d'équilibre du fait de la température non nulle.

9. Le fil est soumis à une tension $U = E \times L$. On peut de plus relier l'intensité du courant électrique au vecteur courant électrique selon :

$$I = j \times S = \sigma E \times S = \sigma S \times \frac{U}{L} \Rightarrow R = \frac{L}{\sigma S}$$

10. Ce dipôle de résistance R consomme une puissance $P = RI^2$.

Le champ électrique accélère les électrons, les collisions de ces électrons sur le réseau entraînent une dissipation d'énergie par effet Joule qui se manifeste par une élévation de température du matériau.

2 Étude des fusibles en céramique

1. Loi de Fourier : $\vec{j} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T)$.

Dans cette relation, \vec{j} représente le vecteur densité de courant thermique en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$, λ la conductivité thermique en $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ et T la température.

Cette relation phénoménologique indique qu'en présence d'une inhomogénéité de température, il apparaît un flux thermique dans le sens opposé au gradient de température (signe « - ») et proportionnel à celui-ci.

2. On applique le premier principe de la thermodynamique pour un système indéformable ($\delta W = 0$) compris entre x et $x + dx$ entre deux instants voisins t et $t + dt$.

En plus des apports thermiques dus aux flux aux limites du domaine, il faut tenir compte d'un apport en volume dû à l'effet Joule sachant que la résistance thermique de l'élément de longueur dx vaut $\delta R = dx/(\sigma \times S)$.

On en déduit :

$$dU = \mu c S dx dT = \mu c S dx \frac{\partial T}{\partial t} dt = [j(x, t) - j(x + dx, t)] S dt + \frac{dx}{\sigma S} I^2 dt$$

$$\Leftrightarrow \mu c S dx \frac{\partial T}{\partial t} dt = -\frac{\partial j(x, t)}{\partial x} S dx dt + \frac{dx}{\sigma S} I^2 dt$$

En utilisant la loi de Fourier à une dimension $j(x, t) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$, on en déduit la relation souhaitée :

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{I^2}{\sigma S^2} + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

3. En régime permanent, la température ne dépend pas explicitement du temps, l'équation précédente se simplifie selon :

$$\lambda \frac{d^2 T}{dx^2} = -\frac{I^2}{\sigma S^2} \Rightarrow T(x) = -\frac{I^2}{2\lambda\sigma S^2} x^2 + Ax + B$$

Les conditions aux limites imposent $T(x = 0) = T(x = L) = T_0$, c'est à dire :

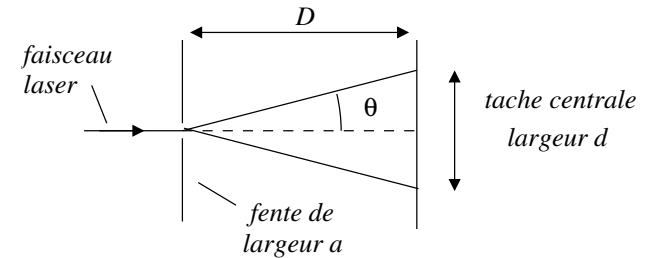
$$T_0 = B \quad \text{et} \quad T_0 = -\frac{I^2}{2\lambda\sigma S^2} L^2 + AL + B$$

On en déduit par résolution du système $B = T_0$, $A = \frac{I^2 L}{2\sigma\lambda S^2}$ et finalement :

$$\forall x \in [0, L], \quad T(x) = T_0 + \frac{I^2}{2\lambda\sigma S^2} x(L - x)$$

Le champ de température a une **allure parabolique** avec un maximum au centre en $x = L/2$.

4. Comme indiqué à la question précédente, le point le plus chaud se situe au centre du fil, la fusion, si elle a lieu, débute en $x_{\text{fusion}} = L/2$.
5. On peut bien sûr penser à un pied à coulisse ou à un palmer, mais les diamètres les plus petits ne pourraient être déterminés avec précision, en tout cas pas au micromètre près. La méthode la plus adaptée est sans doute une méthode basée sur la diffraction. On suppose disposer : de fentes calibrées, d'un pointeur laser émettant avec une longueur d'onde λ (par exemple dans le rouge), d'un écran et d'une règle permettant l'évaluation des distances.



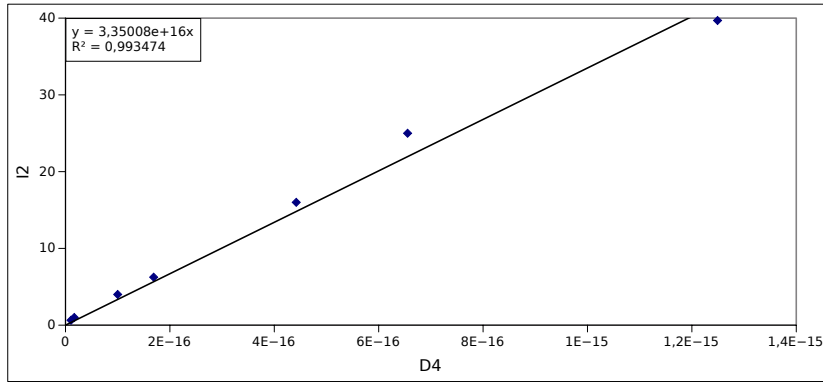
L'ouverture angulaire $\theta = \frac{\lambda}{a}$ crée sur l'écran un tache de largeur $d = \frac{2\lambda}{a} \times D$.

Pour une série de fentes calibrées, on mesure d et on trace d en fonction de a . On remplace alors les fentes par les filaments de diamètre variables et grâce à la courbe obtenue, la largeur des taches de diffraction permet de remonter au diamètre des fils.

6. La fusion se produit initialement au centre du fil, ce qui conduit, sachant que $S = \pi D^2/4$, à :

$$T_f = T_0 + \frac{I^2}{2\lambda\sigma S^2} \times \frac{L^2}{4} \Leftrightarrow I^2 = \frac{\lambda\sigma(T_f - T_0)\pi^2}{2L^2} D^4$$

On trace alors I^2 en fonction D^4 :



La pente α a pour valeur $\alpha = 3,35 \times 10^{16} \text{ A}^2 \cdot \text{m}^{-4}$, ce qui impose :

$$\frac{\lambda\sigma(T_f - T_0)\pi^2}{2L^2} = \alpha \Leftrightarrow \lambda\sigma(T_f - T_0) = \frac{\alpha \times 2L^2}{\pi^2} = 6,1 \times 10^{12} \text{ A}^2 \cdot \text{m}^{-2}$$

Il reste maintenant à évaluer ce terme pour les différents matériaux proposés avec $T_0 = 293 \text{ K}$.

	aluminium	argent	plomb
$\lambda\sigma(T_f - T_0) (\text{A}^2 \cdot \text{m}^{-2})$	$5,7 \times 10^{12}$	$2,54 \times 10^{13}$	$5,22 \times 10^{10}$

Il semble alors logiquement de retenir **l'aluminium** pour lequel l'écart entre l'expérience et la théorie est de l'ordre de 6%.

3 Étude des fusibles en verre

- On sait que le vecteur courant de conduction thermique est donné par : $\vec{j}_{cond} = -\lambda \text{grad}(T)$. Faisons le rapport en terme de dimension entre le vecteur courant de convection et de conduction :

$$\frac{[j_{conv}]}{[j_{cond}]} = \frac{[hT]}{[\lambda \times T/L]} = \left[\frac{hL}{T} \right]$$

On constate que le nombre de Biot est le **rapport du flux convectif en surface sur le flux diffusif dans le matériau**. C'est donc bien un nombre sans dimension.

- Considérons un fusible en aluminium avec un diamètre de l'ordre du dixième de millimètre :

$$Bi = \frac{10 \times 0,1 \times 10^{-3}}{237} \Rightarrow \boxed{Bi \approx 4 \times 10^{-6} \ll 1}$$

- On applique le premier principe de la thermodynamique à un élément de fusible de longueur dx entre deux instants voisins de dt . Cet élément a une

aire latérale $dS = 2\pi r \times dx = \pi D dx$. Les différents termes à considérer dans le bilan sont :

- flux entrant conductif : $j_Q(x)S$;
- apport dû à l'effet Joule : $\delta R \times I^2$;
- flux sortant conductif : $j_Q(x + dx)S$;
- flux sortant latéral convectif : $h(T(x) - T_0)\pi D dx$.

En régime permanent, les apports doivent compenser les pertes ce qui s'écrit :

$$j_Q(x)S dt + \delta R \times I^2 dt = j_Q(x + dx)S dt + h(T(x) - T_0)\pi D dx dt$$

$$\Leftrightarrow \frac{dx}{\sigma S} I^2 = \frac{d}{dx} \left(-\lambda \frac{dT}{dx} \right) \times S dx + h(T(x) - T_0)\pi D dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{I^2}{\sigma \lambda S^2} - h [T(x) - T_0] \times \frac{\pi D}{\lambda S} = 0$$

Avec $S = \frac{\pi D^2}{4}$, on en déduit :

$$\Leftrightarrow \frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{16 I^2}{\sigma \lambda \pi^2 D^4} - [T(x) - T_0] \times \frac{h \pi D}{\lambda \times \pi D^2 / 4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{d^2 T(x)}{dx^2} + k^2 T_1 - k^2 [T(x) - T_0] = 0}$$

- L'équation différentielle se réécrit :

$$\frac{d^2 T(x)}{dx^2} - k^2 T(x) = -k^2 (T_1 + T_0)$$

Pour cette équation linéaire, la solution est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.

$$\forall x \in]0, L[, \quad T(x) = T_1 + T_0 + A e^{-kx} + B e^{kx}$$

Les conditions aux limites imposent $T(0^+) = T_0$ et $T(L^-) = T_0$:

$$T_0 = T_1 + T_0 + A + B \quad \text{et} \quad T_0 = T_1 + T_0 + A e^{-kL} + B e^{kL}$$

C'est à dire : $A + B = -T_1$ et $A e^{-kL} + B e^{kL} = -T_1$, la résolution de ce système d'équation conduit à :

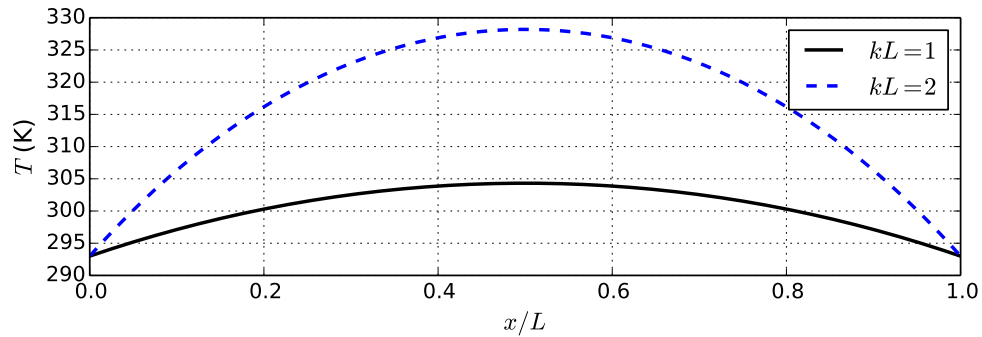
$$A = \frac{(1 - e^{kL}) \times T_1}{e^{kL} - e^{-kL}} = \frac{-T_1}{1 + e^{-kL}} \quad \text{et} \quad B = \frac{(e^{-kL} - 1) \times T_1}{e^{kL} - e^{-kL}} = \frac{-T_1 e^{-kL}}{1 + e^{-kL}}$$

Expressions que l'on reporte dans la solution générale de l'équation pour obtenir :

$$\forall x \in]0, L[, \quad T(x) = T_0 + T_1 \times \left[1 - \frac{e^{-kx} + e^{kx} \times e^{-kL}}{1 + e^{-kL}} \right]$$

En factorisant par $e^{-kL/2}$ au numérateur et au dénominateur de la fraction on trouve la formule proposée dans la suite de l'énoncé.

5. Allure du champ de température pour deux valeurs différentes de k , avec $T_1 = 100$ K.



6. Dans cette étude **le transfert thermique par rayonnement** n'a pas été pris en compte.