

Devoir non surveillé n°03 bis (correction)

De la cuisson des œufs (Centrale PSI 2016)

Partie A. Chauffage de l'eau.

- À pression fixée, la variation d'enthalpie s'identifie au transfert thermique reçu. On applique alors le premier principe à l'ensemble {eau+cuiseur} lors de l'échauffement du système :

$$c(m_0 + m_c)[T_{eb} - T_0] = \mathcal{P}\Delta t_1$$

- Grâce à l'expression précédente, on obtient :

$$m_c = \frac{\mathcal{P}\Delta t_1}{c[T_{eb} - T_0]} - m_0 = \frac{350 \times 150}{4180 \times 80} - 125 \Rightarrow m_c = 32 \text{ g}$$

Partie B. Détermination de la durée de cuisson Δt_2 .

- Mécanisme de la cuisson des œufs

La raison de l'existence de la pique n'est malheureusement pas à chercher dans l'énoncé. Une **poche d'air** est présente dans l'œuf qui, sous l'effet de la chaleur lors de la cuisson, tend à se dilater à volume constant, la coquille étant indéformable, ce qui entraîne une augmentation de pression qui peut conduire à la rupture de la coquille.

- Modélisation et établissement de l'équation de la chaleur

- On considère la couche sphérique d'épaisseur dr à laquelle on applique le premier principe de la thermodynamique entre deux instants voisins t et $t + dt$. Pour cette phase condensée incompressible, on assimile l'enthalpie et l'énergie interne. En notant $\Phi(r, t)$ le flux thermique qui traverse la sphère de rayon r :

$$\delta m \times c \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} dt = \mu \times 4\pi r^2 dr c \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} dt = [\Phi(r, t) - \Phi(r + dr, t)] dt = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} dr dt$$

Compte tenu de la loi de Fourier, le flux Φ s'exprime selon :

$$\Phi(r, t) = j(r) \times 4\pi r^2 = -\lambda \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} 4\pi r^2$$

En combinant les deux relations, on en déduit :

$$\frac{\partial T(r, t)}{\partial t} = \frac{\lambda}{\mu c} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} \right)$$

- Le changement de variables impose :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial \tau} \times \frac{1}{\theta} \quad \text{et} \quad \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial T}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial r} = \frac{\partial T}{\partial \rho} \times \frac{1}{r_2}$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{1}{r_2^2} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(r_2^2 \rho^2 \frac{\partial T}{\partial \rho} \frac{1}{r_2} \right) \frac{\partial \rho}{\partial r} = \frac{1}{r_2^2} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(r_2^2 \rho^2 \frac{\partial T}{\partial \rho} \frac{1}{r_2} \right) \times \frac{1}{r_2}$$

On en déduit :

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} \times \frac{1}{\theta} = \frac{\lambda}{\mu c} \frac{1}{r_2^2} \times \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial T}{\partial \rho} \right)$$

Ce qui impose $\theta = \frac{\mu c \times r_2^2}{\lambda}$.

θ représente le temps caractéristique d'évolution du système et r_2 la longueur caractéristique. On retrouve le résultat classique d'un phénomène de diffusion selon lequel la diffusion met 4 fois plus de temps pour se propager sur une distance deux fois plus grande.

- Résolution de l'équation de la chaleur

- On reporte la forme proposée dans l'équation de la diffusion thermique :

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{df(\rho)}{d\rho} g(\tau) \right) = f(\rho) \times g'(\tau) \Leftrightarrow \frac{1}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} \left(\rho^2 \frac{df(\rho)}{d\rho} \right) g(\tau) = f(\rho) \times g'(\tau)$$

Il existe nécessairement au moins un $\rho_0 \in]0, 1[$ pour lequel $f(\rho_0) \neq 0$, dans le cas contraire f serait la fonction identiquement nulle et la température dans l'œuf serait uniforme et invariante dans le temps ce qui n'est pas réaliste.

Il vient alors :

$$\forall \tau > 0, \quad g'(\tau) = \left[\frac{1}{\rho^2 \times f(\rho)} \frac{d}{d\rho} \left(\rho^2 \frac{df(\rho)}{d\rho} \right) \right]_{\rho=\rho_0} \times g(\tau)$$

Le terme entre crochets est une constante réelle indépendante de τ que l'on peut appeler B . Cette constante est nécessairement négative, car la température au sein de l'œuf doit tendre vers la température à sa surface au bout d'un temps long, $g(\tau)$ doit donc tendre vers 0 quand $\tau \rightarrow +\infty$ (**système stable**). On appelle donc la constante $B = -A^2$ avec A réelle ce qui assure $B < 0$.

On en déduit par intégration immédiate : $g(\tau) = g_0 e^{-A^2 \tau}$.

- On reporte l'expression proposée dans l'équation différentielle compte tenu du résultat précédent :

$$-A^2 = \frac{1}{\rho^2 (F(\rho)/\rho)} \frac{d}{d\rho} \left[\rho^2 \frac{d}{d\rho} \left(\frac{F(\rho)}{\rho} \right) \right] \Leftrightarrow -A^2 = \frac{1}{\rho F(\rho)} \frac{d}{d\rho} [\rho F'(\rho) - F(\rho)]$$

En multipliant par $\rho F(\rho)$, on en déduit, avec $\rho \neq 0$:

$$F''(\rho) + A^2 F(\rho) = 0$$

F vérifie l'équation d'un oscillateur harmonique, ce qui donne pour la solution :

$$F(\rho) = \alpha \cos(A\rho) + \beta \sin(A\rho) \Rightarrow f(\rho) = \frac{\alpha \cos(A\rho)}{\rho} + \frac{\beta \sin(A\rho)}{\rho}$$

Pour une constante d'intégration α non nulle, la température diverge au centre de l'œuf ce qui est impossible. On impose donc $\alpha = 0$ et finalement :

$$f(\rho) = \frac{\beta \sin(A\rho)}{\rho}$$

(c) **L'équation étant linéaire**, on peut sommer des solutions de la forme précédemment obtenue avec des coefficients β_i et A_i qu'il reste à déterminer.

On doit imposer :

- une condition initiale : $\forall \rho \in]0, 1[, T(\rho, 0^+) = T_0$;
- des conditions aux limites portant sur l'égalité du flux thermique et de la température des deux côtés de la coquille.

4. Détermination des constantes dans l'approximation de Fourier

(a) On impose l'égalité des flux thermiques des deux côtés de la coquille :

— en $\rho = 1^+$, on utilise la loi de Newton :

$$\Phi(\rho = 1^+) = h(T(\rho = 1) - T_{\text{eb}}) \times 4\pi r_2^2 = h \times \beta \exp(-A^2\tau) \sin(A) \times 4\pi r_2^2$$

— en $\rho = 1^-$, on utilise la loi de Fourier :

$$\Phi(\rho = 1^-) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}(r = r_2^-) \times 4\pi r_2^2 = -\lambda \frac{\partial T}{\partial \rho}(\rho = 1^-) \times \frac{\partial \rho}{\partial r} \times 4\pi r_2^2$$

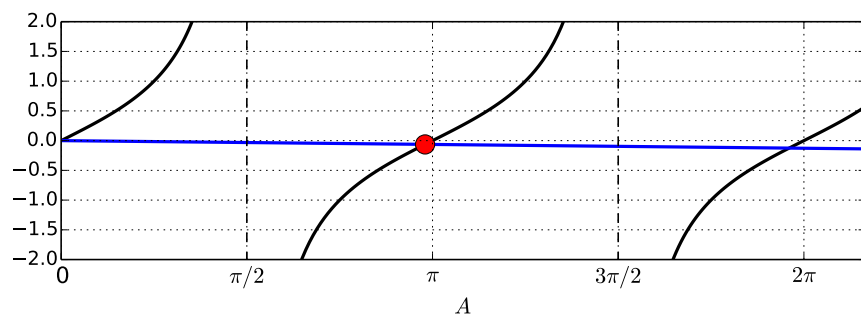
$$\Rightarrow \Phi(\rho = 1^-) = -\lambda \exp(-A^2\tau) \frac{d}{d\rho} \left(\frac{\beta \sin(A\rho)}{\rho} \right)_{\rho=1^-} \times \frac{1}{r_2} \times 4\pi r_2^2$$

$$\Leftrightarrow \Phi(\rho = 1^-) = -\lambda \beta \exp(-A^2\tau) [-\sin(A) + A \cos(A)] \times \frac{1}{r_2} \times 4\pi r_2^2$$

L'égalité des deux flux impose :

$$r_2 h \sin(A) = \lambda \sin(A) - \lambda A \cos(A) \Leftrightarrow \tan(A) = \frac{A}{1 - r_2 h / \lambda}$$

(b) Avec les valeurs proposées : $\frac{r_2 h}{\lambda} = \frac{2,5 \times 10^{-2} \times 1200}{0,6} = 50$; on trace alors les fonctions $A \rightarrow \tan(A)$ et $A \rightarrow -A/49$:



Du fait du coefficient $-1/49$, on constate que les courbes se croisent en $A \approx \pi$ pour la première valeur non nulle.

Pour évaluer l'erreur commise, on pose : $A = \pi + \varepsilon$:

$$\tan(\pi + \varepsilon) = \tan(\varepsilon) = \frac{\pi + \varepsilon}{-49} \Rightarrow \varepsilon \approx -\frac{\pi}{49} - \frac{\varepsilon}{49} \Leftrightarrow \varepsilon = -\frac{\pi}{50} \text{ rad}$$

On a bien $\varepsilon \ll \pi$.

(c) Avec $A \approx \pi$:

$$T(\rho, \tau) = T_{\text{eb}} + \frac{\beta}{\rho} \sin(\pi\rho) \times \exp(-\pi^2\tau)$$

Avec cette expression $T(\rho = 1) = T_{\text{eb}}$. La température à la surface de la coquille est égale à la température extérieure, ce qui revient à supposer $h \rightarrow +\infty$. En effet, il existe un flux thermique pour une différence de température quasi-nulle.

$$(d) \text{ Avec } T(0, 0^+) = T_0 = T_{\text{eb}} + \beta\pi \Leftrightarrow \beta = \frac{T_0 - T_{\text{eb}}}{\pi}$$

5. Calcul de la durée de cuisson Δt_2 pour un œuf dur

(a) On cherche la valeur de τ_c qui vérifie $T(0, \tau_c) = T_c$, ce qui impose :

$$T_c = T_{\text{eb}} + (T_0 - T_{\text{eb}}) \exp(-\pi^2\tau_c) \Leftrightarrow \tau_c = \frac{1}{\pi^2} \ln \left(\frac{T_{\text{eb}} - T_0}{T_{\text{eb}} - T_c} \right)$$

Sachant que $\Delta t_2 = \theta \times \tau_c$, on obtient finalement :

$$\Delta t_2 = \frac{\theta}{\pi^2} \ln \left(\frac{T_{\text{eb}} - T_0}{T_{\text{eb}} - T_c} \right) = \frac{r_2^2 \mu c}{\lambda \times \pi^2} \ln \left(\frac{T_{\text{eb}} - T_0}{T_{\text{eb}} - T_c} \right)$$

(b) Application numérique :

$$\Delta t_2 = \frac{0,025^2 \times 1000 \times 4180}{0,6 \times \pi^2} \ln \left(\frac{100 - 20}{100 - 80} \right) \Rightarrow \Delta t_2 = 6,1 \times 10^2 \text{ s}$$

La durée est de l'ordre de **10 minutes** ce qui semble cohérent pour obtenir un œuf dur.

Partie C. Détermination de la masse d'eau à placer dans le cuiseur

1. Détermination approchée de l'énergie de cuisson d'un œuf dur \mathcal{E}_d

Du fait du profil de température au sein de l'œuf une fois cuit, la température doit atteindre $T_c = 80^\circ\text{C}$ au centre et T_{eb} au niveau de la coquille.

Pour estimer simplement l'énergie nécessaire à la cuisson de l'œuf, on suppose que l'énergie apportée sert à chauffer l'œuf de manière uniforme.

Le premier principe appliqué à l'œuf considéré comme une phase condensée indéformable conduit à :

$$\mathcal{E}_d = \mu \times \frac{4}{3} \pi r_2^3 \times c \times (T_f - T_0)$$

L'œuf doit *a minima* atteindre la température $T_c = 80^\circ\text{C}$ et atteindra à la limite T_{eb} ce qui fournit les deux cas limites.

(a) *Borne inférieure* :

$$\mathcal{E}_{d,\text{min}} = 1000 \times \frac{4}{3} \times \pi (0,025)^3 \times 4180 \times 60 \Rightarrow \mathcal{E}_{d,\text{min}} \approx 16 \text{ kJ}$$

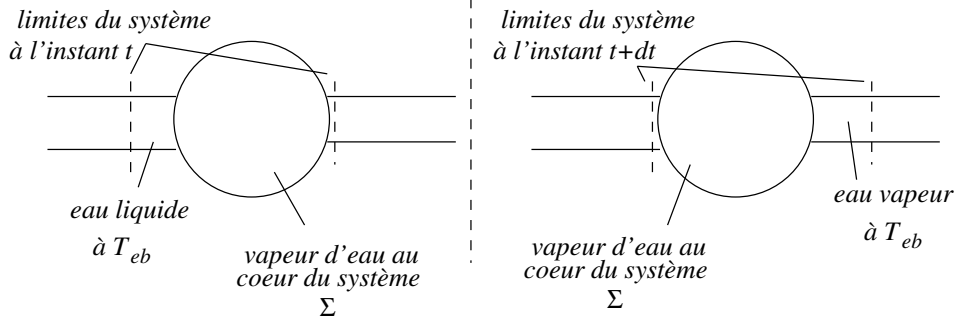
(b) Borne supérieure :

$$\mathcal{E}_{d,\max} = 1000 \times \frac{4}{3} \times \pi(0,025)^3 \times 4180 \times 80 \Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_{d,\max} \approx 22 \text{ kJ}}$$

(c) En adoptant la moyenne arithmétique :

$$\mathcal{E}_d = \frac{16,4 + 21,9}{2} \Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_d = 19 \text{ kJ}}$$

2. On considère comme système l'eau qui s'écoule au sein du dispositif entre l'entrée e et la sortie s de celui-ci comme indiqué sur le schéma :



Représentation symbolique du système

Pour ce système en écoulement stationnaire, on applique un premier principe industriel en l'absence de pièces mobiles (pas de puissance mécanique) :

$$D_m(h_s - h_e) = D_m \ell_v = \mathcal{P}_{th}$$

En effet, la variation d'enthalpie massique entre l'eau vapeur en sortie et l'eau liquide en entrée toutes deux à T_{eb} n'est rien d'autre que l'enthalpie massique de vaporisation de l'eau.

Pour la puissance thermique \mathcal{P}_{th} , il faut tenir compte :

- de la puissance de fuite : $-\mathcal{P}_f$;
- de la puissance fournie par le chauffage : \mathcal{P} ;
- de la puissance cédée aux n œufs, sachant que pendant dt , chaque œuf reçoit une énergie $d\mathcal{E}$.

En conséquence :

$$\boxed{D_m \ell_v = \mathcal{P} - \mathcal{P}_f - n \frac{d\mathcal{E}}{dt}}$$

3. La masse totale évaporée correspond à toutes les masses élémentaires évaporées durant le processus :

$$m_0 = \int dm = \int_0^{\Delta t_2} \frac{dm}{dt} dt = \int_0^{\Delta t_2} D_m dt = \int_0^{\Delta t_2} \left(\frac{\mathcal{P} - \mathcal{P}_f}{\ell_v} - \frac{n}{\ell_v} \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right) dt$$

La somme des énergies fournies à l'œuf sur la totalité de la cuisson est notée \mathcal{E}_X , on en déduit alors par intégration :

$$\boxed{m_0 = \left(\frac{\mathcal{P} - \mathcal{P}_f}{\ell_v} \right) \Delta t_2 - \frac{n}{\ell_v} \mathcal{E}_X}$$

Comme annoncé, on constate que la masse d'eau utilisée est une fonction décroissante du nombre d'œufs à cuire.

4. Le terme m_0 est nécessairement positif, ce qui impose :

$$(\mathcal{P} - \mathcal{P}_f) \Delta t_2 \geq n \mathcal{E}_X \Leftrightarrow \mathcal{P} = \frac{n \mathcal{E}_X}{\Delta t_2} + \mathcal{P}_f$$

Application numérique, avec $\mathcal{P}_f \approx 0$:

$$\mathcal{P}_{min} = \frac{7 \times 19 \times 10^3}{600} \Rightarrow \boxed{\mathcal{P}_{min} = 2,2 \times 10^2 \text{ W}}$$

Cette puissance est bien inférieure à la puissance annoncée de $\mathcal{P} = 350 \text{ W}$.

5. Analyse des résultats :

Pour un type de cuisson donné, on observe que la masse est bien une fonction affine décroissante du nombre d'œufs.

— pour un œuf dur, le coefficient directeur vaut $a_{exp} = 5,94 \text{ g/œuf}$; le modèle a fourni le résultat :

$$a_{mod} = \mathcal{E}_X / \ell_v = 19 \times 10^3 / (2,26 \times 10^6) = 8,4 \times 10^{-3} \text{ kg/œuf} = 8,4 \text{ g/œuf.}$$

L'énergie apportée est proportionnelle au cube du rayon de l'œuf, ce qui impose :

$$\frac{r_2^3}{r_{etal.}^3} = \frac{\mathcal{E}_X(r_2)}{\mathcal{E}_X(r_{etal.})} = \frac{a_{mod}}{a_{exp}} \Leftrightarrow r_{etal.} = r_2 \left(\frac{a_{exp}}{a_{mod}} \right)^{1/3}$$

Application numérique :

$$r_{etal.} = 2,5 \times 10^{-2} \times \left(\frac{5,94}{8,4} \right)^{1/3} \Rightarrow \boxed{r_{etal.} = 2,2 \text{ cm}}$$

— En négligeant les pertes, l'ordonnée à l'origine b est donnée par :

$$b = \frac{\mathcal{P} \Delta t_2}{\ell_v} \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{\ell_v \times b}{\mathcal{P}} = \frac{2,26 \times 10^6 \times 126 \times 10^{-3}}{350} \Rightarrow \boxed{\Delta t_2 = 8,1 \times 10^2 \text{ s}}$$

Le temps de cuisson est sensiblement plus élevé que la valeur obtenue précédemment.