Lycée Naval, Spé 2.

Devoir non surveillé n°03 (pour le lundi 02 novembre 2020)

Les fusibles électriques (E3A PSI 2017)

L'idée de la protection des systèmes électriques par fusibles s'est imposée formellement avec le double développement de l'électrification et de l'industrie. Dès les premières tentatives, la structure de base des fusibles actuels a été définie avec les éléments essentiels :

— deux pièces de connexion permettant de relier le fusible au reste du circuit électrique ;
— un fil métallique dont le métal constitutif est choisi avec un point de fusion à basse température (typiquement du plomb ou de l'étain) ;
— une cavité qui assure un rôle de protection et qui peut contenir un isolant.

En situation de fonctionnement normal, le fusible assure le passage du courant. Lors de l'apparition d'un défaut électrique, créant un courant anormalement élevé, le fusible permet la coupure automatique du circuit électrique : le fil métallique constituant le fusible fond en raison de l'apport d'énergie anormalement important du fait du défaut électrique.

Données :

— charge élémentaire $e = 1,60 \times 10^{-19}$ C ;
— masse de l'électron $m_e = 9,11 \times 10^{-31}$ kg ;
— constante de Boltzmann $k_B = 1,38 \times 10^{-23}$ J $\cdot$ K^{-1} ;
— constante d'Avogadro $\mathcal{N}_A = 6,02 \times 10^{23}$ mol^{-1}.

Données relatives à l'aluminium :

— l'aluminium libère exactement trois électrons de conduction par atome ;
— masse volumique de l'aluminium $\mu_{Al} = 2,6989$ g $\cdot$ cm^{-3} ;
— masse molaire atomique de l'aluminium $M_{Al} = 27,0$ g $\cdot$ mol^{-1} ;
— capacité thermique massique de l'aluminium $c_{Al} = 897$ J $\cdot$ K^{-1} $\cdot$ kg^{-1} ;
— enthalpie massique de fusion de l'aluminium $\Delta h_{fus,Al} = 398$ kJ $\cdot$ kg^{-1}.

Caractéristiques de différents métaux :

	Plomb	Argent	Aluminium
température de fusion T_f (K)	600,7	1235	933,5
conductivité thermique λ (W $\cdot$ m^{-1} $\cdot$ K^{-1})	35,3	429	237
conductivité électrique σ (unité S.I.)	$4,81 \times 10^6$	$6,30 \times 10^7$	$3,77 \times 10^7$

1 Conduction dans les métaux

Le milieu conducteur d'un fusible est constitué par un fil métallique de forme cylindrique orienté suivant l'axe Bx, de section constante S, de longueur $L = 3,0$ cm et de conductivité σ.
Une différence de potentiel constante $U = V_B - V_A$ est appliquée entre ses extrémités $B(x = 0)$ et A $(x = L)$.

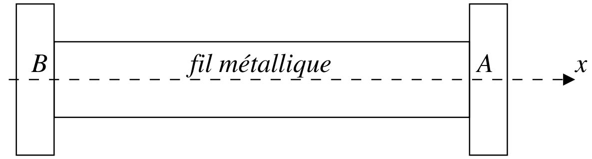

Figure 1: fil métallique conducteur

On admettra que le champ électrique est donné par $\vec{E} = \dfrac{U}{L}\vec{u}_x$.

Un métal est modélisé par un réseau cristallin d'ions positifs fixes dans lequel des électrons de conduction, de charge $(-e)$ et de masse m_e, se déplacent librement. La densité volumique d'électrons de conduction dans le métal est notée n.

1. Calculer, à l'aide des données, la densité volumique d'électrons de conduction n_{Al} dans l'aluminium.

   On précise les hypothèses de base de la théorie cinétique de Drude :
   — les électrons de conduction possèdent une vitesse $\vec{v}$ et subissent des chocs de manière aléatoire ;
   — entre deux collisions, le mouvement de l'électron est supposé rectiligne et la durée moyenne entre deux collisions est notée τ ;
   — juste après un choc, l'électron libre possède une vitesse $\vec{v}_0$ d'orientation et de norme aléatoires ;
   — le système n'est soumis à aucun champ magnétique.
2. Appliquer la relation fondamentale de la dynamique à un électron libre entre deux chocs successifs dans le référentiel supposé galiléen du laboratoire. On précisera pourquoi l'action de la pesanteur peut être négligée. On choisira un ordre de grandeur usuel pour la valeur du champ électrique $E = 10$ V $\cdot$ m^{-1}.
3. Expliquer pourquoi la vitesse $\vec{v}_0$ ne contribue fondamentalement pas à la vitesse moyenne des électrons.
4. Exprimer la vitesse moyenne selon l'axe B_x notée $\langle v_x \rangle$ en fonction de e, m_e, τ et de U et L.
5. En déduire que la conductivité du matériau conducteur s'écrit $\sigma = \dfrac{ne^2\tau}{m_e}$.

On précisera l'unité classiquement utilisée pour cette grandeur.

6. Calculer la durée moyenne entre deux collisions τ_{Al} lorsque le conducteur est l'aluminium.

Le libre parcours moyen est la distance moyenne parcourue par un électron entre deux chocs.

7. Calculer un ordre de grandeur de $\langle v_x \rangle$ pour un fusible composé d'un fil d'aluminium. On choisira un ordre de grandeur usuel pour la valeur du champ électrique. Commenter en comparant à la vitesse d'agitation thermique.
8. En déduire un ordre de grandeur du libre parcours moyen d'un électron dans le fil d'aluminium d'un fusible. Quelle critique peut-on faire au modèle de Drude ?

On constate expérimentalement que la mobilité et donc le temps de relaxation τ dépendent de la température. Pour la suite, on négligera les variations de conductivité avec la température.
On considère le fil métallique comme une résistance électrique. Il est parcouru par un courant d'intensité I constante.

9. Déterminer l'expression de la résistance électrique de ce dipôle R en fonction de σ, S et L.
10. Donner l'expression de la puissance électrique reçue par ce dipôle. Expliquer l'origine de cette puissance.

2 Étude des fusibles en céramique

Un fusible en céramique est constitué d'un fil métallique cylindrique de section S, de longueur L. On donne la masse volumique μ, les conductivités thermique λ et électrique σ, la capacité thermique massique c du fil métallique. On considère que toutes ces grandeurs sont uniformes dans le fil métallique et indépendantes de la température.
Le fil métallique est soudé à ses deux extrémités sur des plots de cuivre massif que l'on considère conducteur électrique et thermique parfait. Le cuivre est maintenu à une température constante T_0. Il s'agit de la température de l'air extérieur au fusible.
Le fil métallique est inséré dans une gaine en silice assurant une isolation latérale thermique et électrique parfaite.
Le fil métallique est parcouru par un courant d'intensité I.

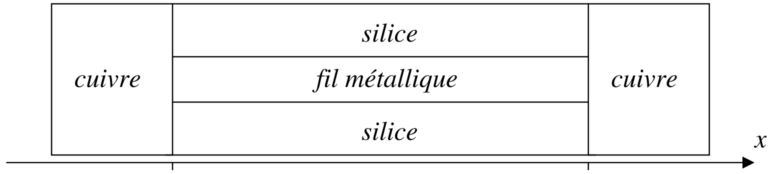

figure 2: fusible en céramique

On considère que la température ne dépend que de la position et du temps, c'est à dire $T = T(x,t)$.

1. Rappeler la loi de Fourier. Préciser sa signification physique ainsi que celle de chacun de ses termes. Donner les unités de chaque terme.
2. Montrer que l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la température peut s'écrire sous la forme
$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{I^2}{\sigma S^2} + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$
3. Établir le profil de température dans le fil métallique en régime stationnaire. Tracer l'allure de ce profil.

La température de fusion du métal est notée T_f.

4. Donner la position x_{fusion} du fil métallique où débute la fusion du métal lorsque le courant atteint l'intensité maximale I_{max} supportée par le fusible.

Pour différents instruments électriques (multimètres, GBF,...) on dispose au laboratoire d'un ensemble de fusibles dont les valeurs d'intensités maximales admissibles varient. On cherche à déterminer au laboratoire le diamètre D du fil métallique constituant chaque fusible, de l'ordre du micromètre. On mesure la longueur des fusibles : $L = 3,0$ cm.

5. Proposer une méthode optique permettant de déterminer avec du matériel usuel de laboratoire le diamètre des fils métalliques des différents fusibles. Une description rigoureuse du principe de la méthode est attendue.

Les différents fusibles sont composés du même type de métal. Les mesures pour chacun de l'intensité maximale en fonction de leur diamètre sont effectuées pour $T_0 = 293$ K et résumées dans le tableau suivant :

I_{max} (A)	0,8	1,0	2,0	2,5	4,0	5,0	6,3
D (μm)	57	64	100	114	145	160	188

6. En explicitant votre méthode, déterminer l'élément chimique le plus probable constituant le fil métallique du fusible. Cette question demande de l'autonomie et sera évaluée en conséquence.

3 Étude des fusibles en verre

Au laboratoire on dispose aussi de fusibles où le fil métallique est entouré d'air. On doit donc tenir compte de la convection entre le fil métallique et l'air environnant.
Les échanges thermiques à l'interface sont modélisés par la loi de Newton. Le flux thermique surfacique cédé à l'air extérieur est $\vec{j}_{conv} = h\,(T(x) - T_{air})\,\vec{u}$ avec h le coefficient de transfert convectif et $\vec{u}$ est un vecteur unitaire suivant la normale extérieure à la surface d'échange.
On considère que $T_{air} = T_0$.
Le coefficient d'échange thermique h décrit les transferts de chaleur entre le fusible et l'air.

Le fil métallique est toujours soudé à ses deux extrémités sur des plots de cuivre massif maintenus à la température T_0.

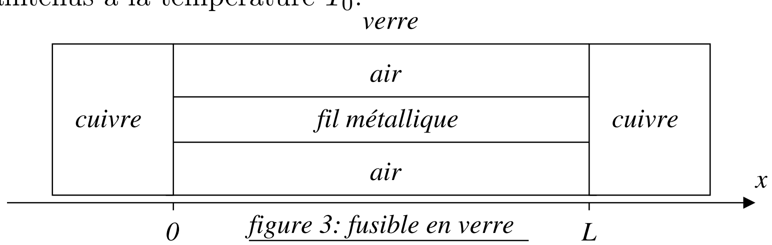

figure 3: fusible en verre

On peut montrer que la température du fil métallique ne dépend que de la position x si B_i le nombre de Biot (sans dimension) est tel que :

$$B_i = \frac{hD}{\lambda} \ll 1\ ,$$

avec :
— D le diamètre du fil métallique ;
— h le coefficient de transfert convectif qui est de l'ordre de grandeur de 10 (unités S.I.) ;
— λ la conductivité thermique du fil métallique.

1. Justifier que le nombre de Biot est sans dimension. Comme le nombre de Reynolds, ce nombre sans dimension permet de comparer deux grandeurs physiques, lesquelles ?

2. Justifier que l'on se trouve ici dans le cas $B_i \ll 1$.

   On supposera cette condition vérifiée dans tout ce qui suit. La température ne dépend que de la position x et du temps t : $T(x,t)$. On se place en régime stationnaire.

   On pose $k = \sqrt{\dfrac{4h}{\lambda D}}$ *et* $T_1 = \dfrac{16 I^2}{\sigma \lambda k^2 \pi^2 D^4}$.

3. Montrer que la température vérifie l'équation

$$\frac{\mathrm{d}^2 T(x)}{\mathrm{d}x^2} - k^2\,(T(x) - T_0 - T_1) = 0$$

4. Résoudre l'équation différentielle en tenant compte des conditions aux limites.

   On montre que la température peut se mettre sous la forme :

$$T(x) = T_0 + T_1\left(1 - \frac{\mathrm{ch}\,(k\,[x - L/2])}{\mathrm{ch}\,(kL/2)}\right)$$

5. Tracer l'allure du profil de température.

6. Quel(s) mode(s) de transfert thermique manque(nt)-t-il(s) à cette étude ?