Lycée Naval, Spé 2.

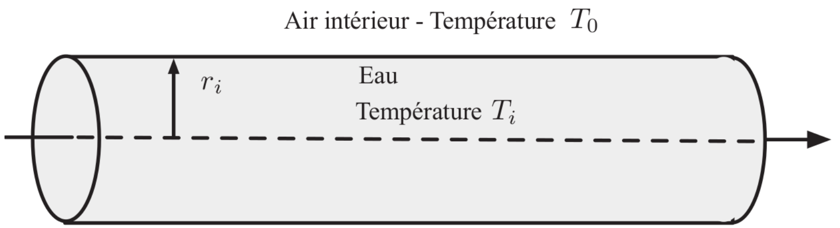
Devoir non surveillé n°03 (pour le 17 octobre 2018)

Isolation thermique d'une canalisation d'eau, CCP MP 2015

Après avoir transité dans l'échangeur thermique, l'eau alimente le réseau d'une habitation.
Afin de limiter les pertes thermiques dans les canalisations, on se propose, dans cette partie, d'étudier quelques solutions d'isolation thermique.

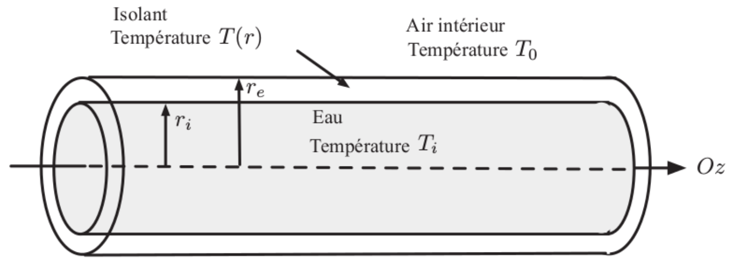
La canalisation est cylindrique, d'axe Oz, de rayon r_i et de longueur $L \gg r_i$. L'eau y circulant est à la température T_i. L'objectif de cette partie est de comparer les pertes latérales de la canalisation sans ou avec un isolant.
On adopte le modèle suivant :

- seule la conduction thermique radiale, c'est-à-dire dans une direction perpendiculaire à l'axe Oz, est prise en compte. On néglige donc la conduction selon l'axe Oz ;
- la température de l'eau dans la canalisation est supposée uniforme. La conduction radiale s'opère donc pour $r \geq r_i$ uniquement ;
- l'étude est menée en régime stationnaire ;
- on néglige l'épaisseur de la paroi de la canalisation. Sans isolant (figure ci-dessous), la canalisation est en contact avec l'air intérieur de l'habitation, de température T_0.



1. La densité surfacique de puissance thermique échangée par transfert conducto-convectif au niveau de la surface latérale de la canalisation est donnée par $\vec{j}_Q = h(T_i - T_0)\vec{u}_r$ (loi de Newton), où h est une constante dimensionnée appelée coefficient d'échange et $\vec{u}_r$ le vecteur unitaire radial de la base cylindrique. Exprimer la puissance thermique P_{th} transférée au niveau de la surface latérale du système.

   On applique désormais un isolant thermique sur la canalisation précédente. L'isolant possède un rayon intérieur r_i et un rayon extérieur r_e (voir figure ci-dessous). En un point situé à une distance r de l'axe Oz et situé à l'intérieur de l'isolant, c'est-à-dire pour $r_i \leq r \leq r_e$ en repérage cylindrique, la température est notée $T(r)$. On note $T_e = T(r_e)$ et $T_i = T(r_i)$.



   Dans la suite, l'échange conducto-convectif au niveau de la surface **intérieure** de l'isolant n'est pas pris en compte.
   La température de part et d'autre de la surface intérieure de l'isolant est continue :
   $T(r_i^-) = T(r_i^+) = T_i$.

2. On suppose que le coefficient d'échange en $r = r_e$ est h. Exprimer la puissance thermique $P_{th,isolant}$ échangée au niveau de la surface latérale extérieure de l'isolant par conduction- convection en fonction de h, T_0, T_e, L et r_e.

3. On note $P_{cond}(r)$ la puissance thermique associée au phénomène de conduction thermique dans l'isolant, traversant un cylindre de longueur L et de rayon r tel que $r_i \leq r \leq r_e$.
   Nous allons établir et exploiter le lien entre $P_{th,isolant}$ et $P_{cond}(r)$.
   (a) En effectuant un bilan d'énergie interne sur un cylindre de longueur L, de rayons interne r et externe $r + dr$ tels que $r_i \leq r < r + dr \leq r_e$ (avec $dr \ll r$), montrer qu'en régime stationnaire $P_{cond}(r)$ est indépendante de r, soit : $\dfrac{dP_{cond}(r)}{dr} = 0$.
   (b) En déduire que : $P_{cond}(r) = P_{th,isolant}$.
   (c) Rappeler l'expression de la loi de Fourier relative à la conduction thermique en exprimant le vecteur densité surfacique de flux de conduction thermique $\vec{j}_{cond}(r) = j_{cond}(r)\vec{u}_r$ en fonction notamment de la conductivité thermique de l'isolant, λ, supposée uniforme. Exprimer ensuite la puissance thermique associée, $P_{cond}(r)$.

   <u>Donnée</u> : en repérage cylindrique : $\overrightarrow{\text{grad}}(f(r)) = \dfrac{df(r)}{dr}\vec{u}_r$

   (d) Déduire des questions précédentes que : $\dfrac{dT}{dr} = \dfrac{hr_e}{\lambda r}(T_0 - T_e)$
   (e) En déduire l'expression de $T(r)$.

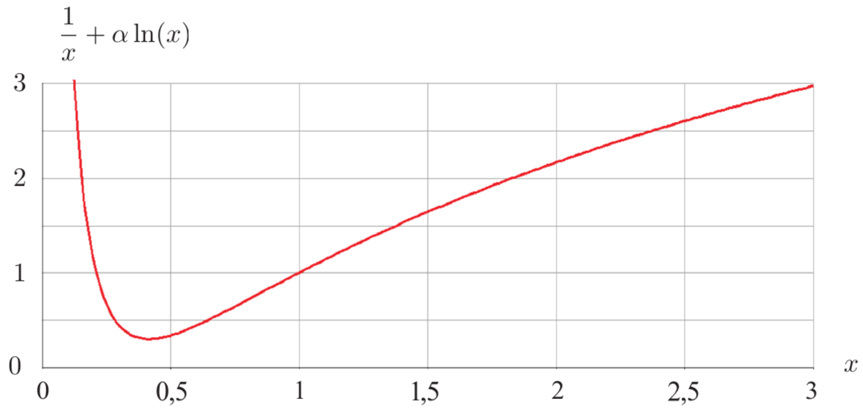
(f) En déduire que : $T_e = T_0 + \dfrac{T_i - T_0}{1 + \dfrac{hr_e}{\lambda} \ln \dfrac{r_e}{r_i}}$

4. Montrer que : $\dfrac{P_{th}}{P_{th,isolant}} = \dfrac{1}{x} + \alpha \ln x$, avec $x = \dfrac{r_e}{r_i}$ et α à exprimer en fonction de h, r_i et λ.

On envisage deux solutions d'isolation différentes. On donne pour chacune d'elles : $h = 3,0\ \mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}}$ et $r_i = 2,0$ cm.

→ **<u>Solution d'isolation n°1</u>** : l'isolant est du polyuréthane, de conductivité thermique : $\lambda_1 = 0,025\ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$.

Le graphe de $\dfrac{1}{x} + \alpha \ln x$ en fonction de x est représenté sur la figure ci-dessous pour la valeur de α correspondante.



→ **<u>Solution d'isolation n°2</u>** : l'isolant est du plâtre, de conductivité thermique λ_2.

Le graphe de $\dfrac{1}{x} + \alpha \ln(x)$ en fonction de x est représenté sur la figure ci-après pour la valeur de α correspondante. L'encart représente un agrandissement pour $0 \leq x \leq 8$.

5. En vous appuyant sur les graphes des dernières figures, répondre de façon argumentée aux questions suivantes :

   (a) Est-il toujours efficace d'isoler avec du polyuréthane ?

   (b) Est-il toujours efficace d'isoler avec du plâtre ? Le cas échéant, déterminer à partir de quelle valeur de r_e l'isolation au plâtre devient efficace et commenter.

   (c) Pour quelle valeur x_m de x la fonction $x \to \dfrac{1}{x} + \alpha \ln(x)$ admet-elle un minimum ?

   (d) En déduire la valeur numérique de la conductivité thermique du plâtre λ_2.