Lycée Naval, Spé 2.

Devoir non surveillé n°01 (CS, TSI, 2018, correction)

1. Le fluide caloporteur reçoit un travail mécanique du compresseur $\boxed{W > 0}$. Il prend de l'énergie à la source froide $\boxed{Q_f > 0}$ et cède de l'énergie à la source chaude $\boxed{Q_c < 0}$.

   Le coefficient de performance est le rapport de l'énergie utile : $-Q_c$ (il s'agit de chauffer la source chaude) sur l'énergie coûteuse W :
   $$\boxed{\eta = \frac{-Q_c}{W}}$$
2. Sur un cycle, le premier principe appliqué au fluide caloporteur conduit à : $\Delta U = W + Q_c + Q_f = 0$.
   Sur un cycle, le deuxième principe pour une évolution réversible donne : $0 = \dfrac{Q_c}{T_c} + \dfrac{Q_f}{T_f}$.

   On en déduit :
   $$\eta_{max} = \frac{-Q_c}{-Q_c - Q_f} = \frac{1}{1 + Q_f/Q_c} = \frac{1}{1 - T_f/T_c} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\eta_{max} = \frac{T_c}{T_c - T_f}}$$
3. Application numérique :
   $$\eta_{max} = \frac{273 + 44}{44 - 13} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\eta_{max} = 10}$$
   La valeur obtenue pour un fonctionnement réversible est **peu réaliste**, en pratique on peut espérer un COP de deux ou trois.
4. Cf cours « bilans macroscopiques ».
5. L'évolution $1 \to 2$ correspond au passage dans le compresseur caractérisé par une augmentation de la pression. La transformation est supposée adiabatique (transformation rapide à l'échelle des échanges thermiques avec l'extérieur) et quasi-réversible, la courbe suit donc une **isentropique**.
   L'évolution $2 \to 5$ correspond au passage dans le condenseur au contact de la source chaude, **la vapeur se condense**.
   L'évolution $5 \to 6$ correspond au passage dans le détendeur ; en l'absence d'apports mécaniques ou thermiques, **l'enthalpie massique** se conserve d'où la droite verticale.
   L'évolution $6 \to 1$ correspond au **passage dans l'évaporateur** au contact de la source froide.
6. Un liquide étant en général très difficile à comprimer, on s'assure que le fluide caloporteur est bien totalement sous forme vapeur avant d'entrer dans le compresseur, c'est l'intérêt de la surchauffe de $7 \to 1$.
7. À travail fourni fixé, **l'efficacité de la pompe à chaleur est maximisée** si on augmente $|Q_c|$, c'est l'intérêt de l'évolution $4 \to 5$.
8. Appliquons le premier principe industriel à l'évolution $6 \to 1$. Le fluide caloporteur au contact de la source froide reçoit une puissance thermique $\dot{Q}_f$, on néglige bien sûr les variation d'énergies cinétique et potentielle vis à vis des variations d'enthalpie :
   $$D_m\,(h_1 - h_6) = \dot{Q}_f \quad \Rightarrow \quad \boxed{D_m = \frac{\dot{Q}_f}{h_1 - h_6}}$$
   Application numérique (les enthalpies massiques étant lues sur le graphique) :
   $$D_m = \frac{60 \times 10^3}{(405 - 270) \times 10^3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{D_m = 0,44 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}}$$
9. Pour l'évolution $1 \to 2$ où seule P_u la puissance mécanique du compresseur est à prendre en considération :
   $$P_u = D_m\,(h_2 - h_1) = 0,44 \times (435 - 405) = 13,2 \text{ kW}$$
   Pour l'évolution $2 \to 5$, où seule la puissance $\dot{Q}_c$ de la source chaude est à considérer :

$$\dot{Q}_c = D_m\,(h_5 - h_2) = 0,44 \times (270 - 435) = -72,6 \text{ kW}$$

Ce qui donne pour l'efficacité :

$$\eta = \frac{-(-72,6)}{13,2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\eta_{th} = 5,5}$$

Pour ce fonctionnement réel, l'efficacité est déjà significativement plus basse que l'efficacité réversible.

10. Efficacité réelle : $\eta_r = 72,6/19 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\eta_r = 3,8}$
    Ce nouveau calcul prend en compte le rendement du compresseur, l'efficacité précédente représentait la seule efficacité thermodynamique du cycle.
11. On applique le premier principe industriel sur une tranche dx de l'échangeur :
    $$D_{m_0}\,[h(x+dx) - h(x)] = D_{m_0} dh = p_{th} dx = \alpha\,[T_e - T(x)]\,dx$$
    Pour le liquide $dh = c_e dT$, on en déduit :
    $$D_{m_0} c_e dT = \alpha\,[T_e - T(x)]\,dx \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{dT}{dx} + \frac{\alpha}{D_{m_0} c_e} T(x) = \frac{\alpha}{D_{m_0} c_e} T_e}$$
12. Pour la suite on pose : $\boxed{l_c = \dfrac{D_{m_0} c_e}{\alpha}}$.

    La solution générale de l'équation différentielle est de la forme :
    $$\forall x \in \,]0, 4L_0[\,,\ T(x) = A e^{-x/l_0} + T_e$$
    En tenant compte de la condition aux limites $T(0) = T_i$, on en déduit :
    $$\boxed{\forall x \in [0, 4L_0[\,,\ T(x) = (T_i - T_e) \times e^{-x/l_0} + T_e}$$
13. l_c est la **longueur caractéristique sur laquelle la température évolue**. Sur une distance égale à quelques fois l_c, la température du fluide atteint la température des eaux usées.
14. Le fluide caloporteur de la pompe à chaleur reçoit une puissance thermique $\dot{Q}_f > 0$ au niveau de l'évaporateur. Cette énergie est prise sur le fluide du circuit 1 qui entre à la température T_{E_1} et en sort à la température T_{S_1}. L'application du premier principe industriel au fluide du circuit 1 conduit à :
    $$D_{m_1} c_e\,(T_{S_1} - T_{E_1}) = -\dot{Q}_f \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{D_{m_1} = \frac{\dot{Q}_f}{c_e\,(T_{E_1} - T_{S_1})}}$$
    Application numérique :
    $$D_{m_1} = \frac{60 \times 10^3}{4,18 \times 10^3 \times 2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{D_{m_1} = 7,2 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}}$$
15. Du fait de l'association parallèle : $\boxed{D_{m_0} = D_{m_1}/N_m}$.
16. L'équation du champ de température exprimée en sortie du dispositif conduit à :
    $$T(4L_0) = T_f = T_e + (T_i - T_e) e^{-4L_0/l_c} \quad \Leftrightarrow \quad L_0 = \frac{l_c}{4} \times \ln\left(\frac{T_e - T_i}{T_e - T_f}\right)$$
    N_m échangeurs de longueur individuelle réelle L_0 correspondent à une longueur totale :
    $$\boxed{L = N_m \frac{l_c}{4} \ln\left(\frac{T_e - T_i}{T_e - T_f}\right)}$$
17. Application numérique :
    $$L = 45 \times \frac{(7,2/45) \times 4,18 \times 10^3}{143 \times 4} \times \ln\left(\frac{16 - 12,5}{16 - 15,5}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{L = 1,0 \times 10^2 \text{ m}}$$