Fluides en écoulement

1 Débits et lois de conservation

1.1 Le modèle du fluide continu

Qu'est-ce qu'un fluide ?

⋆ Contrairement à un solide, quelle que soit la force exercée sur un fluide, celui-ci se met en mouvement.

⋆ Un fluide désigne aussi bien un liquide qu'un gaz (qui occupe tout l'espace offert).
Les gaz et les liquides se différencient principalement par la masse volumique.
Ainsi, dans les conditions ambiantes, pour l'eau liquide : $\mu_{eau} = 1,0 \times 10^3$ kg.m^{-3}, pour l'air $\mu_{air} = 1,3$ kg.m^{-3}.

Le fluide, un milieu continu

Un fluide (l'air dans la pièce, l'eau dans une canalisation) peut être décrit à plusieurs échelles :
⋆ *échelle macroscopique* : à cette échelle L, de l'ordre de la taille du système (dimension de la pièce, diamètre de la canalisation), le fluide est un milieu continu. Cette échelle ne permet pas d'étudier les détails de l'écoulement.

⋆ *échelle microscopique* : à cette échelle l, de l'ordre de la distance moyenne entre particules, le fluide est discontinu. Cette description, trop complexe, n'est pas nécessaire pour comprendre l'écoulement du fluide.

⋆ *échelle mésoscopique* : on décompose le fluide en "**particules de fluide**" de taille a telle que $l \ll a \ll L$.
$a \gg l$ assure que la particule de fluide contient suffisamment d'entités pour effectuer des moyennes et définir pression, température, masse volumique, vitesse pour cet élément de fluide.
$a \ll L$ permet de décrire les évolutions des grandeurs d'état au sein du fluide.

La particule de fluide

La particule de fluide est un **système mésoscopique** de **masse constante**.

Cette particule de fluide de volume dV (potentiellement variable) contient N particules élémentaires ayant des vitesses microscopiques $\vec{v}_i$, pour une masse totale constante δm. On associe à cette particule de fluide :

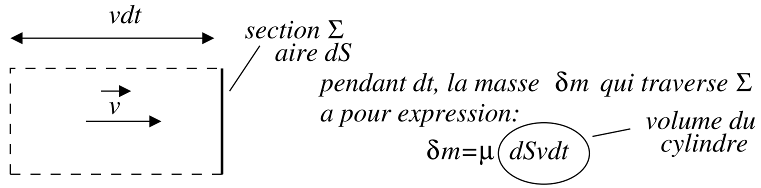
→ une masse volumique : $\boxed{\mu = \dfrac{\delta m}{dV}}$ → un vecteur vitesse : $\boxed{\vec{v} = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \vec{v}_i}$

Ces grandeurs représentent localement la masse volumique et la vitesse du fluide.

Le mouvement du fluide est défini par le champ des vitesses $\vec{v}(\vec{r}, t)$, c'est à dire, à l'instant t, la donnée du vecteur vitesse en chaque point du fluide.

1.2 Débit massique, vecteur densité de courant de masse

Exemple à une dimension

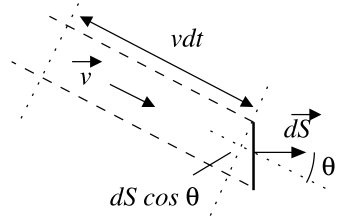


On appelle, **débit massique élémentaire**, la masse δm qui traverse la section Σ par unité de temps :

$$\delta D_m = \frac{\delta m}{dt} = \mu v dS \quad \text{en kg.s}^{-1}$$

Généralisation

Dans le cas général, il faut tenir compte de l'orientation relative du vecteur vitesse local et de la normale à la surface.



La masse δm qui traverse la section d'aire dS pendant dt est contenue dans le volume $vdtdS\cos\theta = \vec{v}.d\vec{S}dt$, ce qui donne pour le débit massique élémentaire :

$$\delta D_m = \frac{\delta m}{dt} = \mu\vec{v}.d\vec{S} = \vec{j}.d\vec{S} \quad \text{ou} \quad \boxed{\delta m = \vec{j}.d\vec{S}dt}$$

→ $\boxed{\vec{j} = \mu\vec{v}}$ est appelé **vecteur densité de courant de masse**, il représente un débit massique par unité de surface (en kg.m^{-2}.s^{-1}).

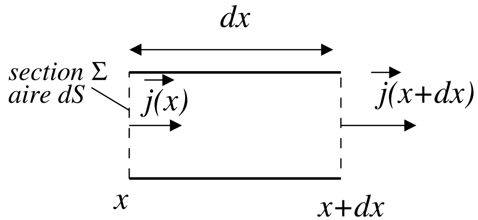
→ Le flux du vecteur courant à travers une surface orientée est égal au débit massique :

$$\boxed{D_m = \iint_\Sigma \vec{j}.d\vec{S}}$$

1.3 Équations de conservation de la masse

Bilan local

→ Exemple unidirectionnel (géométrie cartésienne) :



Pour ce volume élémentaire indéformable, le bilan de masse s'écrit :

$$\delta m(x, t + dt) = \delta m(x, t) + j_x(x, t)dSdt - j_x(x + dx, t)dSdt$$

$$[\mu(x, t + dt) - \mu(x, t)]\, dSdx = [j_x(x, t) - j_x(x + dx, t)]\, dSdt$$

À l'ordre 1 en dx et dt :

$$\mu(x, t + dt) - \mu(x, t) \simeq \frac{\partial\mu}{\partial t}dt, \text{ et } j_x(x, t) - j_x(x + dx, t) \simeq -\frac{\partial j_x}{\partial x}dx$$

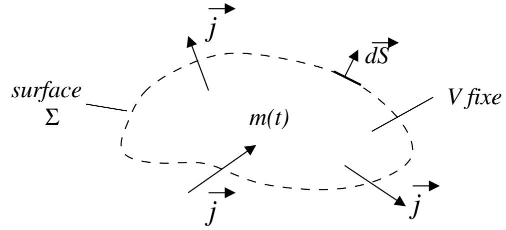
On en déduit : $\boxed{\frac{\partial\mu}{\partial t} + \frac{\partial j_x}{\partial x} = 0}$ avec $j_x = \mu v_x$

→ Généralisation : $\boxed{\frac{\partial\mu}{\partial t} + \text{div}\vec{j} = 0 \quad \text{avec} \quad \vec{j} = \mu\vec{v}}$

1.4 Expression intégrale de conservation de la masse

Considérons un volume V fixe, délimité par une surface Σ fermée et orientée vers l'extérieur et contenant une masse M. La variation de la masse est associée au flux du vecteur densité de courant à travers la surface :

$$\boxed{\frac{dM(t)}{dt} = -\oiint_\Sigma \vec{j}.d\vec{S}}$$



Justification :

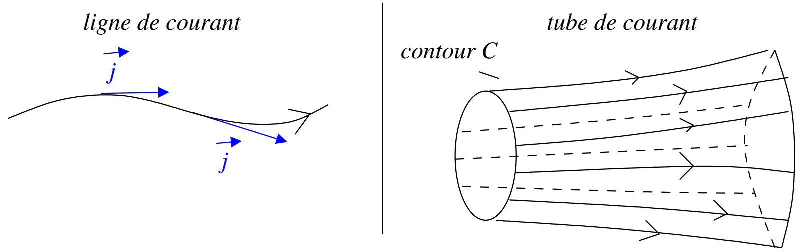
$$\frac{dM(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\iiint_V \mu(P, t)dv_p = \iiint_V \frac{\partial\mu(P, t)}{\partial t}dv_p = -\iiint_V \text{div}\vec{j}\ dv_p = -\oiint \vec{j}.d\vec{S}$$

1.5 Écoulements stationnaires (permanents)

Ligne de courant, tube de courant

→ Les **lignes de courant** sont les lignes tangentes au vecteur densité de courant de masse en tout point et orientées par ce vecteur.

→ L'ensemble des lignes de courant s'appuyant sur un contour $\mathcal{C}$ engendre une surface appelée **tube de courant**.



Caractère conservatif du vecteur courant

En régime stationnaire, les grandeurs ne dépendent pas explicitement du temps, en particulier $\frac{\partial\mu}{\partial t} = 0$.

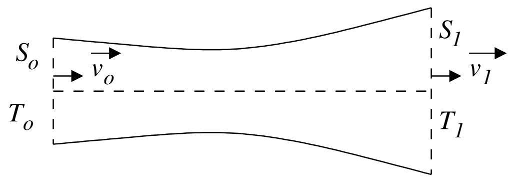
La loi de conservation de la masse prend alors la forme simplifiée :

$$\boxed{\text{div}\vec{j} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \oiint \vec{j}.d\vec{S} = 0}$$

En régime stationnaire, le vecteur courant est à flux conservatif. Cette propriété est équivalent à la **conservation du débit massique** sur toute section d'un tube de courant.

Application : tuyère et écoulement isentropique

On considère l'écoulement permanent et isentropique d'un fluide assimilé à un gaz parfait dans une tuyère :



→ En régime permanent, le débit massique est conservé le long de la tuyère :

$$\mu_o v_o S_o = \mu_1 v_1 S_1$$

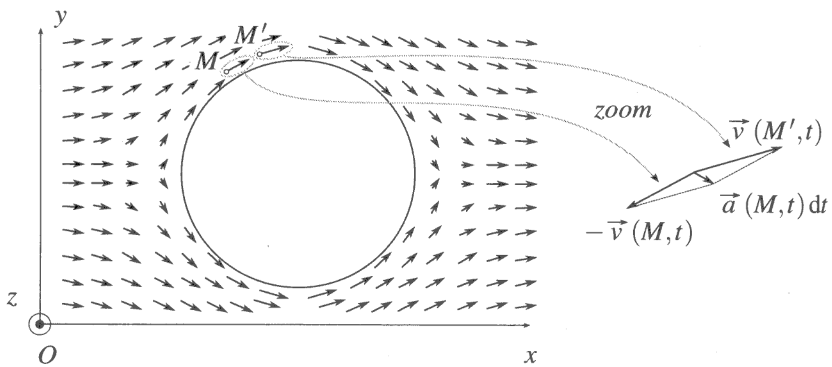
→ Pour l'écoulement isentropique d'un gaz parfait, on applique la loi de Laplace :

$$T_o \mu_o^{1-\gamma} = T_1 \mu_1^{1-\gamma}$$

Ce qui donne : $v_1 = v_0 \dfrac{S_0}{S_1}\left(\dfrac{T_1}{T_o}\right)^{1/(1-\gamma)}$

Carte du champ des vitesses et champ des accélérations

La figure ci-dessous représente le champ des vitesses pour un écoulement plan et stationnaire autour d'un cylindre.



En régime permanent, le champ des vitesses ne dépend pas du temps. La particule de fluide située en M à l'instant t et possédant la vitesse $\vec{v}(M)$, se trouvera en M' en $t + dt$ avec la vitesse $\vec{v}(M')$. On peut alors évaluer le champ des accélérations selon :

$$\vec{a}(M) = \frac{\vec{v}(M') - \vec{v}(M)}{dt}$$

1.6 Écoulement incompressible et homogène

Définition

Un écoulement incompressible et homogène est caractérisé par un champ de masse volumique constant et uniforme :

$$\mu(\vec{r}, t) = \mu_0$$

Remarques :

⋆ Pour une particule de fluide dont la masse se conserve, la conservation de la masse volumique entraîne nécessairement la conservation du volume.

⋆ Pour les liquides, le caractère incompressible est aisément vérifié :

$$\chi_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T \simeq 10^{-10}\ \mathrm{Pa}^{-1}$$

⋆ Pour les gaz, l'écoulement est approximativement incompressible si la vitesse de l'écoulement est faible devant la célérité des ondes acoustiques.

1.7 Propriétés

→ Comme μ de dépend ni des coordonnées d'espace et ni du temps, l'équation locale de conservation de la masse prend la forme simplifiée :

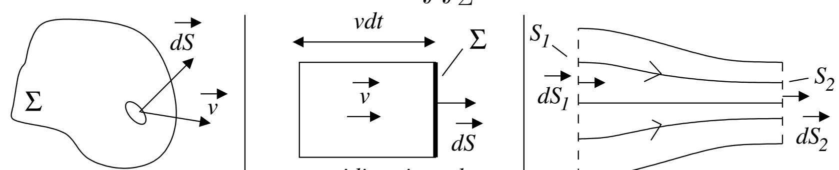
$$0 = \mathrm{div}\,(\mu_0 \vec{v}) + \frac{\partial \mu_0}{\partial t} = \mu_0 \mathrm{div}\,(\vec{v}) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{div}\,\vec{v} = 0$$

Pour un écoulement incompressible et homogène, **le vecteur vitesse est à flux conservatif** :

$$\boxed{\oiint_\Sigma \vec{v}.d\vec{S} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{div}\vec{v} = 0}$$

→ On définit le **débit volumique** comme le flux du vecteur vitesse $\vec{v}$ à travers une surface orientée :

$$D_v = \iint_\Sigma \vec{v}.d\vec{S}$$



débit volumique — *cas unidirectionnel débit volumique* — *tube de courant indéformable*

⋆ Le débit volumique représente le volume de fluide qui traverse une section par unité de temps. Il s'exprime en $\mathrm{m}^3.\mathrm{s}^{-1}$ dans le système international d'unités.

⋆ Pour un écoulement incompressible et homogène, le caractère conservatif du vecteur vitesse assure que le débit volumique se conserve le long d'un tube de courant indéformable :

$$D_{v1} = \iint_{S_1} \vec{v}.d\vec{S}_1 = \iint_{S_2} \vec{v}.d\vec{S}_2 = D_{v2}$$

En supposant un champ des vitesses uniforme sur chacune des sections, on en déduit :

$$v_1 S_1 = v_2 S_2$$

Pour un écoulement incompressible et homogène, le resserrement des lignes de courant indique une augmentation de la norme de la vitesse.

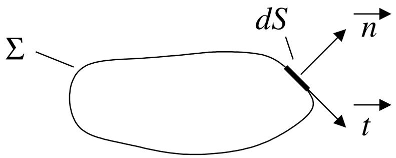
⋆ Pour un écoulement de débit volumique D_v traversant une section d'aire S, on définit la **vitesse débitante U**, ou vitesse moyenne :

$$\boxed{U = D_v/S}$$

2 Actions de contact sur un fluide

2.1 Description

Délimitons un volume V de fluide par une enveloppe fictive Σ ; le fluide extérieur exerce des actions à courte portée sur les particules de fluide contenues à l'intérieur du volume V. On modélise ces actions par une force surfacique.



La résultante $d\vec{F}$ des forces exercées par le fluide extérieur sur l'élément de surface dS peut être décomposée en deux termes :

⋆ Une composante normale : **la force de pression**

$$d\vec{F}_n = -P(M,t)d\vec{S} \quad \text{avec} \quad d\vec{S} = dS\vec{n}$$

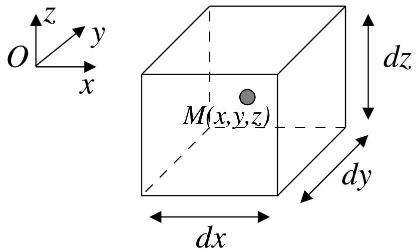
Cette force résulte des chocs des particules de fluide sur la paroi. Le signe « - » assure que cette force est dirigée vers l'intérieur.

⋆ Une composante tangentielle : appelée **force de viscosité** ou force de cisaillement modélisant le frottement des couches de fluide les unes sur les autres.

2.2 Éléments de statique des fluides (rappel première année)

En l'absence d'écoulement, la force de contact est purement normale.

Équivalent volumique des forces de pression



La composante selon Ox de la résultante des forces de pression exercée sur l'élément de volume $d\tau$ s'écrit :

$$dF_x = [P(x - dx/2) - P(x + dx/2)]\, dydz \simeq -\frac{\partial P}{\partial x} dxdydz = -\frac{\partial P}{\partial x} d\tau$$

En généralisant sur les trois directions, on déduit que les forces surfaciques de pression s'exerçant sur un système de volume $d\tau$ sont équivalentes à une force en volume :

$$\boxed{d\vec{f} = -\overrightarrow{\text{grad}}P\ d\tau \quad \Leftrightarrow \quad \vec{f}_v = \frac{d\vec{f}}{d\tau} = -\overrightarrow{\text{grad}}P}$$

Équation de la statique des fluides

On s'intéresse à l'équilibre d'un élément de fluide dans le champ de pesanteur terrestre. Cet élément de fluide est soumis à son poids et aux forces de pression, l'équilibre impose :

$$\mu d\tau \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}}P\ d\tau = \vec{0}$$

Avec $\vec{g} = -g\vec{u}_z$, on en déduit, en projection sur l'axe Oz : $\dfrac{dP}{dz} = -\mu g$

L'équilibre mécanique d'un fluide au repos dans le champ de pesanteur terrestre est régi par l'équation de la statique des fluides : $\dfrac{dP(z)}{dz} = -\mu g$ avec Oz vertical ascendant.

Modèle de l'atmosphère isotherme

Cadre de l'étude et hypothèses :

⋆ On souhaite, à l'aide d'un modèle, décrire certaines caractéristiques de l'atmosphère terrestre.

⋆ On fait l'hypothèse d'un **équilibre thermodynamique local** : autour de chaque point M, on considère un élément de volume $d\tau$ à l'équilibre thermo-

dynamique pour lequel on peut définir la pression $p(M)$, la température $T(M)$, la masse volumique $\mu(M)$.
$\star$ On assimile l'air à un gaz parfait composé de 80% de N_2 et 20% de O_2 de masse molaire $M = 29$ g.mol^{-1}. L'équilibre thermodynamique local permet d'écrire la relation des gaz parfaits pour l'élément $d\tau$:

$$Pd\tau = \delta nRT \quad \Leftrightarrow \quad P = \frac{\delta n}{d\tau}RT = \frac{\delta m}{Md\tau}RT = \frac{\mu RT}{M}$$

$\star$ On fait l'hypothèse d'un champ de pesanteur uniforme $g(z) = g_0 = cste$; sachant que $g(z) = g_0\dfrac{R_T^2}{(R_T+z)^2}$, cette hypothèse est tout à fait réaliste tant que l'on se limite à des altitudes $z \simeq 10$ km $\ll R_T = 6400$ km le rayon terrestre.
$\star$ On suppose une atmosphère à l'équilibre thermique, c'est à dire $T = T_0 = cste$ (cette hypothèse est la plus contraignante, en moyenne la température diminue de $0,6$°C tous les 100 mètres dans la troposphère).

Détermination du champ de pression :

$$\begin{cases} \dfrac{dP(z)}{dz} = -\mu(z)g & \text{équilibre mécanique} \\ P(z) = \dfrac{\mu(z)RT(z)}{M} & \text{équation d'état du fluide} \\ T(z) = T_0 & \text{équilibre thermique} \end{cases}$$

On élimine alors la masse volumique pour obtenir une équation différentielle portant sur la pression :

$$\frac{Mg}{RT_0}P(z) = -\frac{dP}{dz} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{Mgz}{RT_0}\right) = P_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right)}$$

$\star$ On constate que, dans le cadre de ce modèle, la pression diminue exponentiellement avec l'altitude (raréfaction de l'atmosphère) avec $H = \dfrac{RT_0}{Mg} = 8,8$ km (pour $T = 300$ K), appelée hauteur caractéristique ; l'atmosphère a, dans ce modèle, une épaisseur de quelques dizaines de kilomètres.

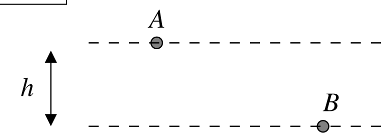
$\star$ À l'échelle d'une pièce, d'un bâtiment $h \simeq 10$ m $\ll H$, la pression peut donc être considérée comme constante égale à P_0 ; on peut donc parler de pression du gaz sans préciser le point.

Fluide incompressible

Dans le cas d'un fluide incompressible et homogène (concrètement les liquides), $\mu = \mu_0$, il est alors immédiat d'obtenir le champ des pressions :

$$\frac{dP(z)}{dz} = -\mu_0 g \quad \Rightarrow \quad P(z) = P(z_0) + \mu_0 g(z_0 - z)$$

Plus simplement, on peut retenir la relation en faisant intervenir la différence de profondeur $\boxed{P_B = P_A + \mu_0 gh}$.



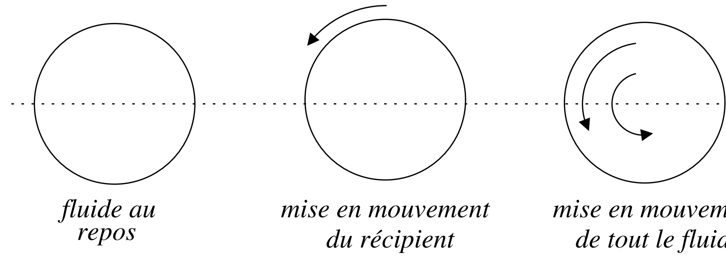
Dans ce modèle, la pression dans un liquide augmente proportionnellement à la profondeur ; ainsi, dans l'eau, si l'on s'enfonce de 10 mètres :

$$\Delta P = 10^3 \times 10 \times 10 = 10^5 \text{ Pa} = 1 \text{ bar}$$

Contrairement à un gaz, la pression dans un liquide varie significativement sur quelques mètres. Ceci s'explique par une masse volumique bien supérieure.

2.3 Viscosité dynamique d'un fluide

Nécessité



Les veines de fluide rapides vont accélérer les veines de fluide lentes. Cette mise en mouvement ne peut s'expliquer en l'absence de forces tangentielles.

Explication microscopique

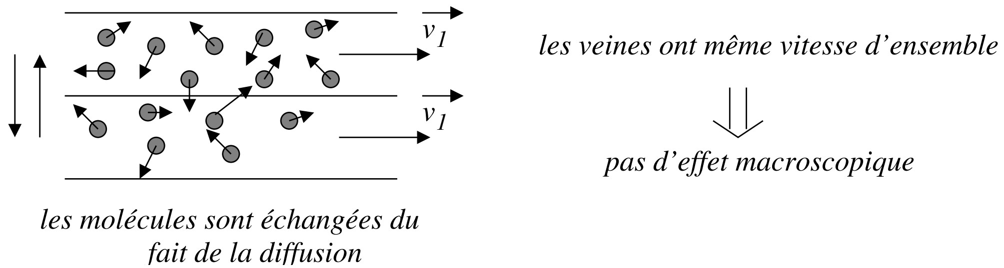
On considère deux veines de fluide adjacentes (Cf. figures ci-après). Dans chaque veine, la vitesse $\vec{v}_i$ d'une molécule peut se décomposer en une vitesse $\vec{v}_i^\star$, vitesse d'agitation microscopique d'orientation aléatoire et d'une vitesse d'ensemble $\vec{v}_e$, la vitesse de l'écoulement ; ce qui donne pour la quantité de mouvement de la molécule :

$$\vec{p}_i = m\vec{v}_i = m\vec{v}_i^\star + m\vec{v}_e \quad \text{avec} \quad \textstyle\sum_i \vec{v}_i^\star = \vec{0}$$

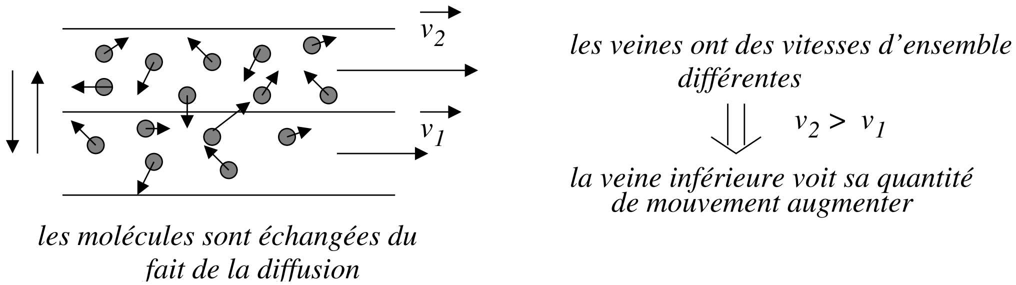
On assiste à un transfert de quantité de mouvement de la veine la plus rapide vers la veine la plus lente qui est donc accélérée, ce qui peut être réinterprétée comme une force.

$\boxed{\text{La viscosité est associée à un transfert diffusif de quantité de mouvement.}}$

Les veines ont même vitesse :

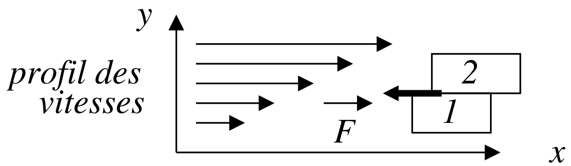


Les veines ont des vitesses différentes :



Force de viscosité

On considère un champ de vitesses de la forme $\vec{v} = v_x(y)\vec{u}_x$



L'élément 1 tendant à freiner l'élément 2, la force de cisaillement exercée par 1 sur 2 :
⋆ est proportionnelle à l'aire S de la surface Σ commune,
⋆ est proportionnelle à $\dfrac{\partial v_x(y)}{\partial y}$ (on parle de fluides newtoniens),
⋆ est de sens opposé à $\vec{e}_x$

$$\boxed{\vec{F}_{1\to 2} = -\eta S \frac{\partial v_x(y)}{\partial y}\vec{u}_x}$$

⋆ le coefficient η est appelé **viscosité dynamique** du fluide ($\eta = \eta(T,p)$)
⋆ L'unité de viscosité est le poiseuille (Pl)

$$1\ \text{Pl} = 1\ \text{Pa.s} = 1\ \text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$$

Exemples de valeurs (pour $T = 20°$C et $p = 1$ bar) :

fluide	air	eau	huile
η (Pl)	$1,8\times 10^{-5}$	$\mathbf{10^{-3}}$	$\simeq 1$

→ Pour $\eta = 0$, on parle de **fluide parfait**.

Condition d'adhérence

Au contact d'une paroi, le fluide a nécessairement la même vitesse que la paroi. S'il n'en était pas ainsi, la paroi exercerait une force infiniment grande sur la couche de fluide en contact. Dit autrement, du fait de sa viscosité, le fluide ne peut pas glisser sur la paroi.

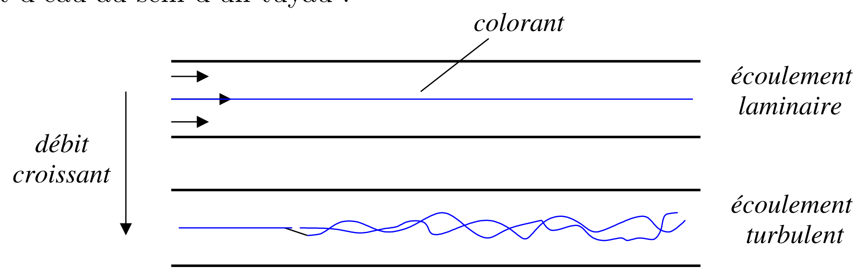
Condition d'adhérence : soit $\vec{V}$ la vitesse du fluide au contact de la paroi, et $\vec{W}$ la vitesse de la paroi, $\vec{V} = \vec{W}$.

3 Écoulement interne incompressible et homogène dans une conduite cylindrique

3.1 Les régimes d'écoulement

Expérience 1

On s'intéresse à la déformation d'un filet de colorant injecté dans l'axe d'un écoulement d'eau au sein d'un tuyau :



En augmentant le débit, on passe d'un **écoulement laminaire** (les couches de fluide ne se mélangent pas) à un **écoulement turbulent** (mélange, régime instable).

Expérience 2

En ouvrant plus ou moins un robinet d'eau, on distingue deux types d'écoulements : aux faibles débits, la forme du jet est régulière et invariante au cours du temps. Aux débits plus importants, la forme du jet devient irrégulière et fluctuante.

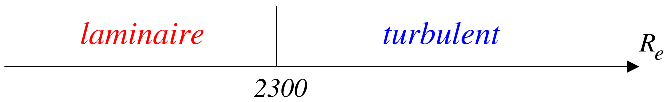
3.2 Nombre de Reynolds

Définition

→ En 1883, Reynolds constate expérimentalement que le régime d'écoulement dans un tuyau ne dépend que d'un nombre sans dimension, **le nombre de Reynolds** :

$$\boxed{\mathcal{R}_e = \frac{\mu U D}{\eta}}$$

avec μ la masse volumique du fluide, η sa viscosité dynamique, U la vitesse moyenne de l'écoulement (vitesse débitante) et D le diamètre du tuyau.



Qualitativement, on conçoit qu'une valeur de viscosité élevée et/ou un faible diamètre vont favoriser les effets de viscosité et un écoulement stable et laminaire ; inversement une vitesse débitante élevée et/ou une masse volumique importante contribuent à renforcer les effets convectifs et un régime turbulent.

→ Considérons de l'eau qui s'écoule dans un tuyau de 10 cm de diamètre avec une vitesse débitante de 1 m/s (débit volumique de 470 L/minute) ; pour cet écoulement, le nombre de Reynolds vaut :

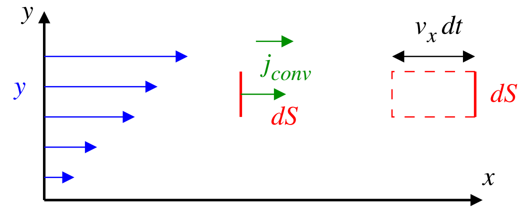
$$\mathcal{R}_e = \frac{10^3 \times 1 \times 0,1}{10^{-3}} = 10^5$$

Les écoulements industriels sont en général turbulents.

Interprétation du nombre de Reynolds

Le nombre de Reynolds suggère une compétition entre des effets de convection et des effets diffusifs (associés à la viscosité). Essayons de quantifier cela dans le cas simplifié d'un écoulement de Couette plan, profil des vitesses $\vec{v} = v_x(y)\vec{u}_x$.

→ <u>Transport convectif de quantité de mouvement</u> :



La quantité de mouvement qui traverse la section d'aire dS pendant dt est contenue dans un cylindre de longueur $v_x dt$:

$$\delta p_x = (\mu v_x) dS v_x dt \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta p_x}{dt} = (\mu v_x)\, v_x dS$$

Par analogie avec un bilan de masse, on en déduit le vecteur courant convectif pour la quantité de mouvement selon x :

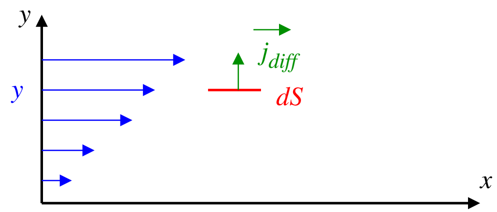
$$\vec{j}_{conv,p_x} = (\mu v_x)\,\vec{v}$$

Ce transport <u>convectif</u> s'effectue à la vitesse $\vec{v}$ de l'écoulement.

⋆ Pour un écoulement de vitesse débitante U, le transfert par convection s'effectue sur une distance L en une durée :

$$\boxed{\tau_{conv} = \frac{L}{U}}$$

→ <u>Transport diffusif de quantité de mouvement</u> :



La couche située en y exerce sur la couche située en $y+dy$, une force de viscosité :

$$dF_x = -\eta \frac{\partial v_x}{\partial y} dS = -\frac{\eta}{\mu}\frac{\partial(\mu v_x)}{\partial y} dS = -\nu \frac{\partial \mu v_x}{\partial y} dS$$

avec $\nu = \eta/\mu$ la viscosité cinématique.

D'après le théorème de la résultante cinétique, une force est équivalente à une variation de quantité de mouvement par unité de temps, il y a donc, par diffusion, un transfert de quantité de mouvement à travers la section dS :

$$\frac{\delta p_x}{dt} = dF_x = -\nu \frac{\partial \mu v_x}{\partial y} dS = j_{diff,p_x} dS = \vec{j}_{diff,p_x} . d\vec{S}$$

Par analogie avec un phénomène de diffusion de particules, on introduit le vecteur courant diffusif pour la quantité de mouvement selon x :

$$j_{diff,p_x} = -\nu \frac{\partial \mu v_x}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad \vec{j}_{diff,p_x} = -\nu \overrightarrow{\text{grad}}\,(\mu v_x)$$

⋆ Pour déterminer le temps caractéristique de diffusion sur une longueur L, on raisonne par analogie avec la diffusion de particules :

diffusion de particules	diffusion de quantité de mouvement
$\vec{j}_N = -D\overrightarrow{\text{grad}}\ n$	$\vec{j}_{diff,p_x} = -\nu \overrightarrow{\text{grad}}\ (\mu v_x)$
$\tau_N = L^2/D$	$\tau_{diff} = L^2/\nu$

→ Interprétation du nombre de Reynolds :

On constate que le nombre de Reynolds est le rapport, pour la quantité de mouvement, du temps caractéristique de diffusion sur le temps caractéristique de convection :

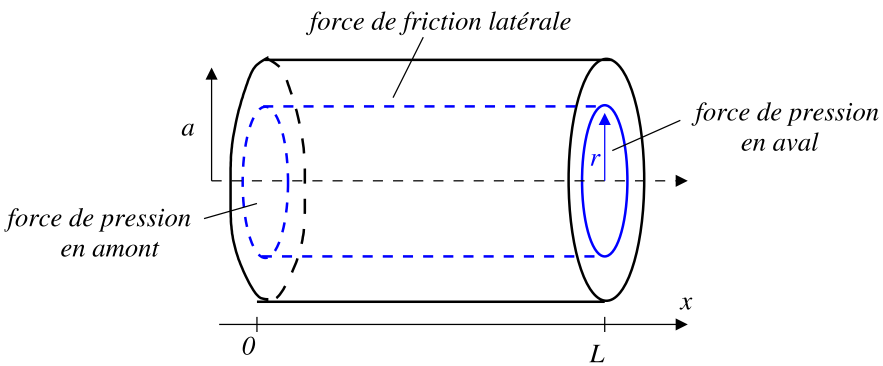
$$\boxed{\mathcal{R}_e = \frac{\tau_{diff}}{\tau_{conv}} \quad \Rightarrow \quad R_e = \frac{\mu U L}{\eta}}$$

$$\tau_{diff} \ll \tau_{conv} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{R}_e \ll 1 \quad \Leftrightarrow \quad \text{la diffusion prédomine}$$
$$\tau_{diff} \gg \tau_{conv} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{R}_e \gg 1 \quad \Leftrightarrow \quad \text{la convection prédomine}$$

3.3 Chute de pression, résistance hydraulique

Description de l'expérience

On s'intéresse à l'écoulement laminaire (bas nombre de Reynolds) d'un fluide incompressible et homogène au sein d'une canalisation cylindrique de rayon a.



Expression du champ des vitesses

→ L'écoulement étant supposé homogène et incompressible, le débit volumique se conserve. À section constante, il en est de même du champ de vitesses et, dans le cas d'un régime laminaire stationnaire, il semble raisonnable de chercher une solution de la forme :

$$\vec{v} = v_x(r)\vec{u}_x$$

→ On considère le système de fluide situé à l'instant t dans le cylindre de rayon r et de longueur L. Pour ce système en écoulement stationnaire, les forces qu'il subit doivent se compenser. En négligeant la pesanteur, elles sont au nombre de trois : force de pression en amont, force de pression en aval, force de viscosité exercée par l'extérieur sur la paroi fictive du cylindre de rayon r :

$$0 = [P(0) - P(L)] \times \pi r^2 + \eta \frac{\partial v_x(r)}{\partial r} \times 2\pi r L$$

On en déduit :

$$\frac{\partial v_x}{\partial r} = \frac{[P(L) - P(0)]}{2\eta L} r \quad \Rightarrow \quad v_x(r) = \frac{[P(L) - P(0)]}{4\eta L} r^2 + cste$$

La condition d'adhérence (vitesse nulle sur la paroi) impose : $v_x(a) = 0$, ce qui permet de déterminer complètement le champ des vitesses à profil parabolique :

$$v_x(r) = \frac{[P(0) - P(L)]}{4\eta L} \left(a^2 - r^2\right)$$

Débit volumique et loi de Hagen-Poiseuille

En intégrant sur la section droite Σ du tuyau, on détermine le débit volumique :

$$D_v = \iint_\Sigma \vec{v}.d\vec{S} = \int_{r=0}^{a} \int_{\theta=0}^{2\pi} v_x(r) dr \times r d\theta = \frac{2\pi\,[P(0) - P(L)]}{4\eta L} \int_{r=0}^{a} \left(a^2 r - r^3\right) dr$$

$$D_v = \frac{2\pi\,[P(0) - P(L)]}{4\eta L} \left(\frac{a^4}{2} - \frac{a^4}{4}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{D_v = \frac{\pi a^4}{8\eta L}\,[P(0) - P(L)]}$$

Le résultat précédent constitue la loi de Hagen-Poiseuille qui relie le débit à la différence de pression dans le cas d'un écoulement laminaire au sein d'une conduite.

Ainsi pour faire circuler de l'huile ($\eta \simeq 1$ Pl) dans un tuyau de 1 cm de diamètre sur une longueur d'un mètre, avec un débit de 0,1 L/s, il faut exercer en amont une surpression voisine de 4 bars. La surpression à imposer serait 1000 fois plus faible pour de l'eau.

Résistance hydraulique

Le débit volumique et la différence de pression étant proportionnels, on peut définir, par analogie avec l'électrocinétique, la notion de résistance hydraulique :

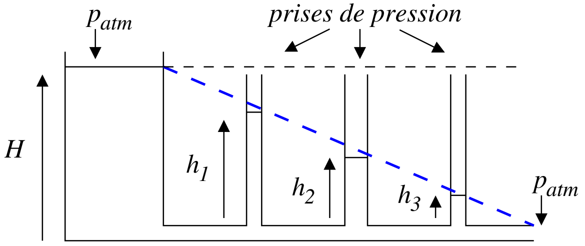
électrocinétique	écoulement laminaire
intensité I	débit volumique D_v
différence de potentiel ΔV	différence de pression ΔP
Résistance électrique $R = \dfrac{\Delta V}{I} = \dfrac{L}{\sigma S}$	Résistance hydraulique $\boxed{R_{hyd} = \dfrac{\Delta P}{D_v} = \dfrac{8\eta L}{\pi a^4}}$

Remarque : la différence de dépendance concernant le rayon a s'explique par une vitesse non uniforme dans le cas de l'écoulement hydraulique.

Chute de pression

La loi de Hagen-Poiseuille montre que la pression décroît linéairement avec la longueur du tube :

$$P(L) - P(0) = -\frac{D_v \times 8\eta}{\pi a^4} \times L$$



Cette chute de pression (perte de charge) serait bien évidemment nulle en l'absence de viscosité.

La pression étant homogène à une énergie par unité de volume, il est d'usage d'exprimer la chute de pression en fonction de l'énergie cinétique volumique d'un écoulement s'effectuant à la vitesse débitante $U = D_v/(\pi a^2)$, c'est à dire, en considérant $d = 2a$, le diamètre de la canalisation :

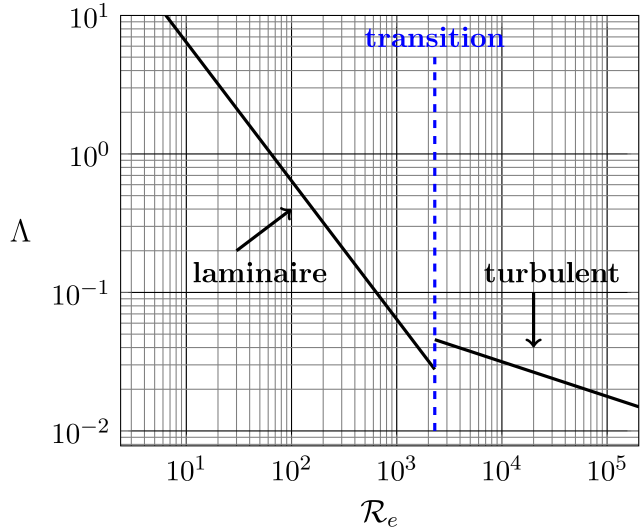
$$\frac{P(0) - P(L)}{1/2\mu U^2} = \frac{U \times \pi a^2 \times 8\eta L}{\pi a^4 \times (1/2)\mu U^2} = \frac{16\eta L}{a^2 \mu U} = \frac{64\eta}{\mu U d} \times \frac{L}{d}$$

On définit enfin le **coefficient de perte de charge** Λ pour $L = d$:

$$\Lambda = \frac{P(0) - P(d)}{1/2\mu U^2} = \frac{64\eta}{\mu U d} \quad \Rightarrow \quad \Lambda = \frac{64}{R_e}$$

Coefficient de perte de charge et régime d'écoulement

Le résultat précédent ($\Lambda = 64/\mathcal{R}_e$) a été obtenu dans le cas d'un régime laminaire ($\mathcal{R}_e < 2300$). Pour un régime turbulent, le coefficient de perte de charge est donné par la formule de Blasius : $\Lambda \simeq 0,316/\mathcal{R}_e^{1/4}$.
Ces résultats sont illustrés sur le graphique ci-dessous.



Remarque : dans le cas réel, le coefficient de perte de charge dépend également de la rugosité de la paroi.

3.4 Similarité

$\boxed{\text{Des écoulements sont similaires si leurs nombres de Reynolds sont identiques.}}$

→ Des conditions expérimentales différentes (fluide, vitesse, diamètre) peuvent conduire à des écoulements similaires à condition que le nombre de Reynolds reste le même.

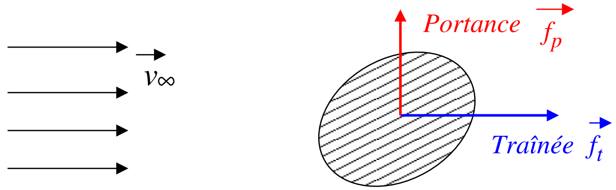
→ Ainsi pour une maquette à l'échelle 1/100, on peut, par rapport à la situation réelle, multiplier la vitesse par environ 10, si on remplace l'air par de l'eau.

4 Écoulement incompressible et homogène autour d'un obstacle

4.1 Traînée et portance

Définition des forces

→ On envisage un objet en mouvement à la vitesse $\vec{v}_{objet}$ dans un fluide au repos. Cela est équivalent à considérer l'écoulement, autour d'un objet immobile, d'un fluide animé de la vitesse uniforme $\vec{v}_\infty = -\vec{v}_{objet}$ à l'infini.



→ Dans le cas général, l'écoulement exerce sur l'obstacle une action que l'on décompose en deux composantes :
⋆ La **traînée** $\vec{f_t}$ parallèle à $\vec{v}_\infty$ ⋆ La **portance** $\vec{f_p}$ perpendiculaire à $\vec{v}_\infty$

Dans le cas général, ces forces sont associées aux actions de contact (forces de pression et forces de cisaillement) exercées par le fluide sur l'objet.

Coefficients de traînée et de portance

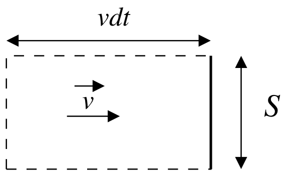
→ On définit C_x, nombre sans dimension, appelé **coefficient de traînée**, par :

$$C_x = \frac{f_t}{\frac{1}{2}\mu v_\infty^2 S} \quad \text{avec } S \text{ la surface projetée de l'obstacle}$$

→ On définit C_z, nombre sans dimension, appelé **coefficient de portance**, par :

$$C_z = \frac{f_p}{\frac{1}{2}\mu v_\infty^2 S} \quad \text{avec } S \text{ la surface projetée de l'obstacle}$$

Remarque : Le terme $\mu v_\infty^2 S$, homogène à une force, représente la force exercée par un fluide venant frapper une plaque de section S et qui serait arrêté par celle-ci.



$$\delta p = -\mu\,(Svdt)*v$$

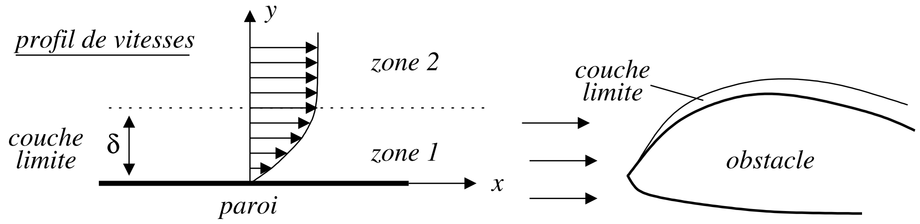
d'où

$$F_{fluide->S} = \frac{\delta p}{dt} = \mu v^2 S$$

4.2 Notion de couche limite

Les phénomènes de viscosité se manifestent principalement au voisinage des parois solides, dans une zone de faible épaisseur où le champ des vitesses présente des fluctuations spatiales importantes (zone 1). Cette zone est appelée **couche limite**.

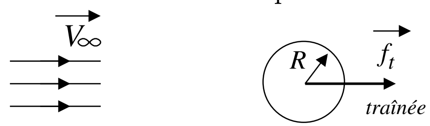
En dehors de la couche limite (zone 2), le fluide, dit libre, se comporte comme un fluide parfait.



4.3 Traînée subie par une sphère solide

Principe

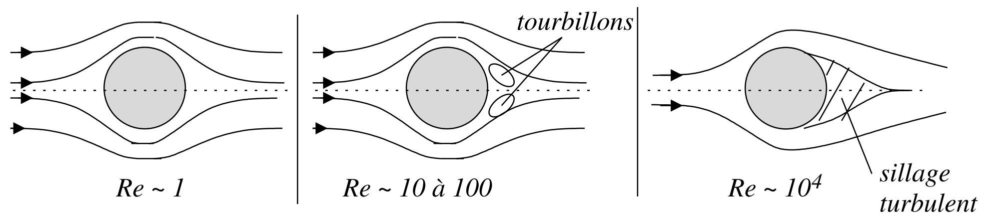
On considère l'écoulement d'un fluide incompressible autour d'une sphère.



De part la symétrie, il n'y a pas de force de portance.

Allure des écoulements

On présente l'allure de l'écoulement autour d'un cylindre en fonction du nombre de Reynolds, on supposera que la forme précise de l'obstacle ne modifie pas significativement la nature de l'écoulement.



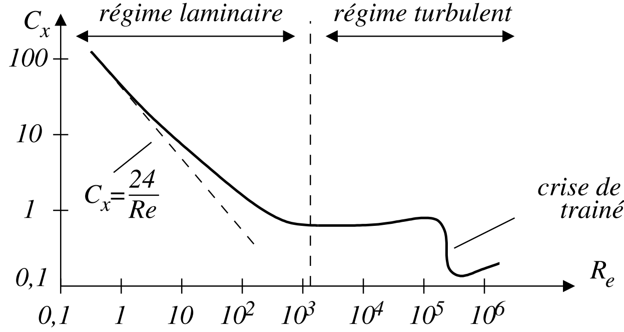
⋆ À faible nombre de Reynolds, l'écoulement est stationnaire et symétrique entre l'amont et l'aval de l'obstacle.

⋆ À nombre de Reynolds intermédiaire, des structures plus complexes apparaissent dans le sillage de l'objet. La dimension des tourbillons augmente avec le nombre de Reynolds.

⋆ À grand nombre de Reynolds, l'écoulement n'est plus stationnaire, il se forme un sillage turbulent derrière l'obstacle.

Coefficient de traînée et nombre de Reynolds

La courbe ci-dessous représente l'allure du C_x en fonction du nombre de Reynolds pour une sphère lisse.



⋆ Force de traînée à faible nombre de Reynolds ($R_e < 1$), régime linéaire :

À faible nombre de Reynolds, $C_x = 24/Re = \dfrac{24\eta}{\mu L v_\infty}$

Avec $S = \pi R^2$ et $L = 2R$, on en déduit, pour la force de traînée :

$$f_t = \frac{1}{2}\mu v_\infty^2 \times \pi R^2 \times \frac{24\eta}{\mu \times 2R \times v_\infty}$$

À faible nombre de Reynolds $Re < 1$, la force de traînée vérifie la **formule de Stokes** :

$$\boxed{\vec{f_t} = 6\pi R\eta\vec{v}_\infty}$$

La formule de Stokes ne fait pas apparaître la masse volumique et est proportionnelle à la vitesse de l'écoulement ; les effets de viscosité (η) l'emportent sur les effets inertiels (μ). Le fluide n'est pas arrêté par l'obstacle mais glisse autour de celui-ci, la force de traînée est associée au frottement du fluide sur la sphère. L'écoulement étant symétrique entre l'amont et l'aval, la résultante des forces de pression est nulle.

> **Les écoulements laminaires** sont des écoulements à faible nombre de Reynolds. La traînée est **proportionnelle à la vitesse** et la viscosité joue un rôle important (au moins localement). On parle de traînée de frottement.

⋆ Force de traînée en régime turbulent $10^3 < Re < 10^5$:

C_x est environ constant, avec $C_x \simeq 1/2$.

On en déduit, pour la force de traînée :

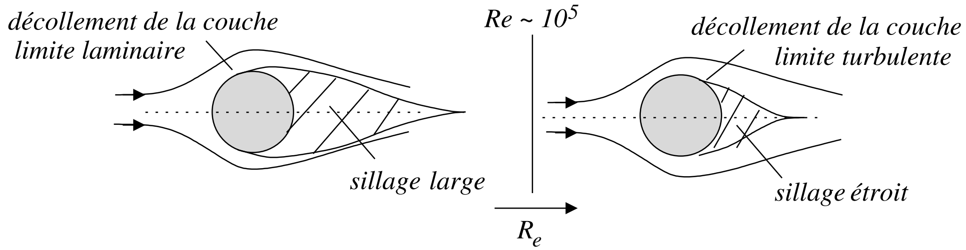
$$f_t \simeq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\mu v_\infty^2\right) \times \pi R^2 \simeq kR^2\mu v_\infty^2 \quad \text{soit} \quad \boxed{f_t = kR^2\mu v_\infty^2} \quad \text{avec} \quad k \simeq 1$$

En régime turbulent, la force de traînée est proportionnelle au carré de la vitesse. Les effets inertiels l'emportent sur l'effet de la viscosité (η n'apparaît pas dans la formule). Le profil d'écoulement n'a plus la symétrie amont-aval, la résultante des forces de pression contribue majoritairement à la traînée.
La force de traînée est d'autant plus faible que le C_x est faible (profil aérodynamique).

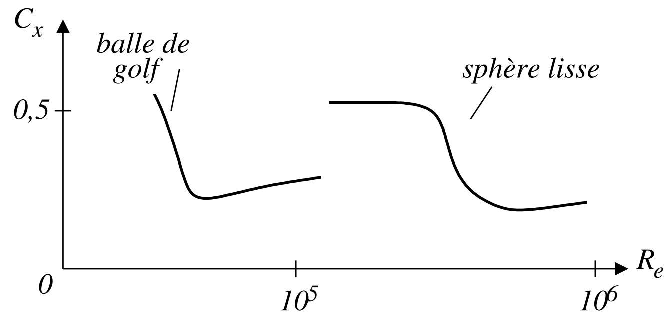
> **Les écoulements turbulents** sont des écoulements à grand nombre de Reynolds. La **traînée est proportionnelle au carré de la vitesse** et la viscosité ne joue pas un rôle prépondérant. On parle de traînée de forme.

⋆ Crise de la traînée :

Dans le cas d'une sphère lisse, pour $Re > 3 \times 10^5$, on observe une chute brutale du coefficient de traînée.
La couche limite laminaire devient une couche limite turbulente qui tient mieux à l'obstacle réduisant d'autant le sillage et le C_x.



Cette crise de la traînée est mise à profit dans les balles de golf dont la surface rugueuse facilite cette transition, réduisant la traînée ce qui permet à la balle d'aller plus loin.



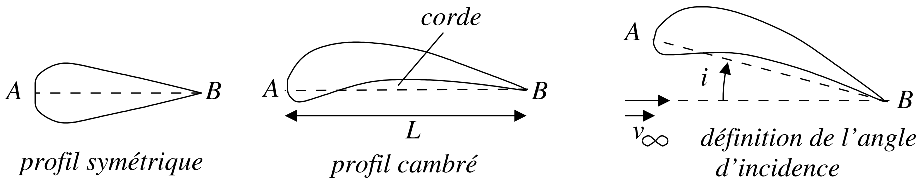
Pour une balle de golf : $R_e = \dfrac{1,3 \times (200/3,6) \times 4,3 \times 10^{-2}}{1,8 \times 10^{-5}} = 1,7 \times 10^5$

En l'absence de rugosité, la valeur du nombre de Reynolds serait inférieure à la valeur de transition.

4.4 Traînée et portance d'une aile d'avion

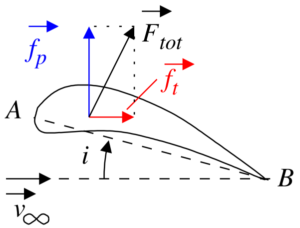
Profil de l'aile et angle d'incidence

Dans cette dernière partie, on s'intéresse aux actions subies par une aile d'avion qui est un **obstacle profilé** pour lequel on peut espérer :
→ une **faible traînée**, une **portance notable**.



Pour un angle d'incidence nul et un profil symétrique, la portance est nulle.

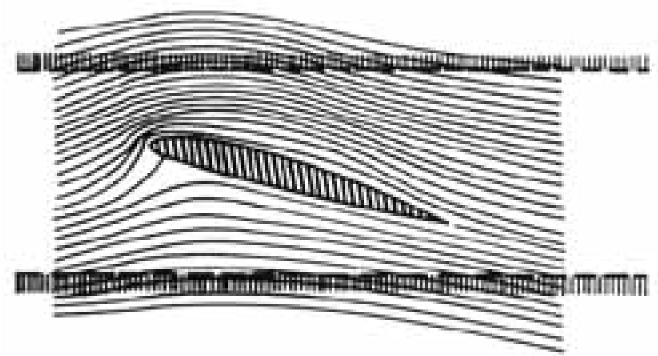
Coefficients de traînée et de portance d'une aile d'avion



Dans la définition des coefficients de traînée C_x et de portance C_z, la surface S est, pour l'aile d'avion, le produit de la corde par l'envergure : $S = L \times L_{env}$.

Troisième loi de Newton et naissance de la portance

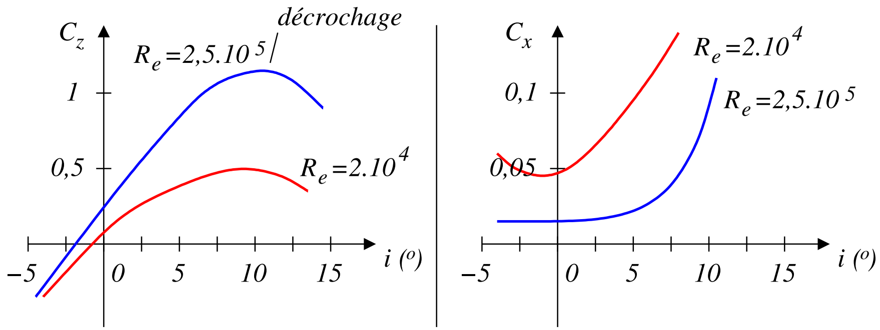
Dans le cas d'un profil cambré ou d'une incidence non nulle, on constate que l'écoulement est dévié par la présence de l'aile.



La troisième loi de Newton assure qu'en retour l'écoulement exerce sur l'aile une force de sens opposé, dirigée vers le haut dans le cas présent, c'est la portance.

Influence de l'angle d'incidence et du nombre de Reynolds

Les courbes ci-dessous montrent l'allure des coefficients de traînée et de portance en fonction de l'angle d'incidence pour différentes valeurs du nombre de Reynolds (pour un avion, les valeurs réalistes du nombre de Reynolds sont élevées).



Influence du nombre de Reynolds :

→ Le coefficient de portance C_z a tendance à augmenter (parfois même très nettement) avec R_e.
→ Le coefficient de traînée C_x diminue quand R_e augmente.
→ On note que C_z est souvent bien supérieur à C_x (ce qui semble logique pour une aile d'avion)

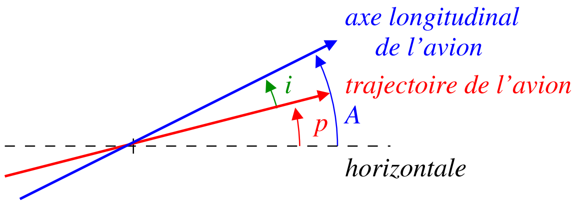
Influence de l'angle :

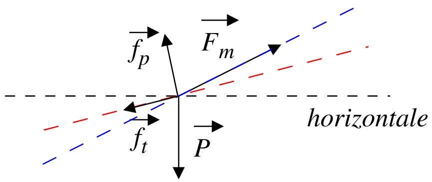
→ C_z augmente avec l'incidence i tant que cet angle reste inférieur à une valeur critique.
→ Au-delà de la valeur limite, l'augmentation de l'angle i provoque un décollement de la couche limite d'extrados, ce qui se caractérise par une baisse de la portance et une augmentation de la traînée, on parle de **décrochage**.

Mécanique du vol d'un avion

Angles et forces :

La trajectoire et la configuration de vol de l'avion dans l'espace sont définis à l'aide de trois angles orientés représentés sur la figure ci-après :



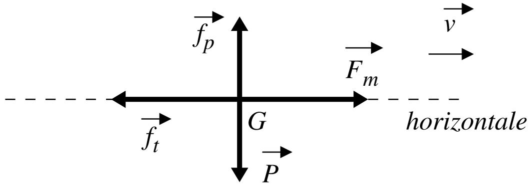


- La pente p, angle entre l'horizontale et la trajectoire de l'avion ;
- l'assiette A, angle entre l'horizontale et l'axe longitudinal de l'avion ;
- l'incidence i, angle entre la trajectoire de l'avion et son axe longitudinal.

L'avion est soumis à quatre forces : son poids $\vec{P}$, la force motrice $\vec{F}_m$ selon l'axe longitudinal de l'avion, la traînée $\vec{f_t}$ opposée à la trajectoire et la portance $\vec{f_p}$ perpendiculaire à la trajectoire.

Exemple d'un vol horizontal à vitesse constante

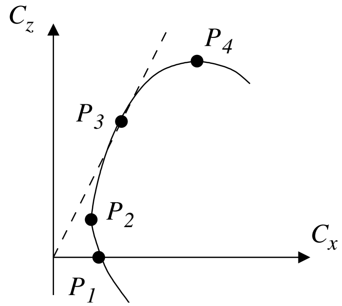
On considère la situation la plus simple d'un vol horizontal ($p = 0$) à vitesse constante avec une incidence nulle ($i = 0$), le schéma des forces prend alors la forme simplifiée :



Le déplacement inertiel impose :
$$\vec{f_t} + \vec{f_p} + \vec{F}_m + \vec{P} = \vec{0}$$
Et en particulier, par projection et en norme : $F_m = f_t$ et $P = f_p$, ce qui donne pour la force motrice :
$$\frac{F_m}{P} = \frac{f_t}{f_p} \quad \Rightarrow \quad F_m = \frac{P}{f_p/f_t} = \frac{mg}{C_z/C_x} = \frac{mg}{f}$$

$f = \dfrac{C_z}{C_x}$ est appelée finesse. Dans l'exemple précédent, la force motrice nécessaire est d'autant plus faible que la finesse de l'avion est grande.

Connaissant les graphes des coefficients C_z et C_x en fonction de l'incidence, on peut tracer la **polaire** donnant C_z en fonction de C_x. Il est alors possible de lire la valeur de la finesse sur la polaire.



On peut identifier quelques points sur cette courbe :
- P_1 point de portance nulle ;
- P_2 point de traînée minimale ;
- P_3 point de finesse maximale ;
- P_4 point de portance maximale.

Capacités exigibles :

→ Débits et lois de conservation

Définir la particule de fluide comme un système mésoscopique de masse constante.
Distinguer vitesse microscopique et vitesse mésoscopique.
Citer des ordres de grandeur des masses volumiques de l'eau et de l'air dans les conditions usuelles.
Définir le débit massique et l'écrire comme le flux du vecteur $\mu\vec{v}$ à travers une surface orientée.
Écrire les équations bilans, globale ou locale, traduisant la conservation de la masse.
Définir un écoulement stationnaire et les notions de ligne de courant et de tube de courant de masse.
Exploiter la conservation du débit massique.
A partir d'une carte de champ des vitesses en régime stationnaire, décrire qualitativement le champ des accélérations.
Définir un écoulement incompressible et homogène par un champ de masse volumique constant et uniforme. Relier cette propriété à la conservation du volume pour un système fermé.
Définir le débit volumique et l'écrire comme le flux de $\vec{v}$ à travers une surface orientée.
Justifier la conservation du débit volumique le long d'un tube de courant indéformable.

→ Actions de contact sur un fluide

Identifier la force de pression comme étant une action normale à la surface.
Utiliser l'équivalent volumique des actions de pression $-\overrightarrow{\text{grad}}P$.
Exprimer l'évolution de la pression avec l'altitude dans les cas d'un fluide incompressible et de l'atmosphère isotherme dans le modèle du gaz parfait.
Relier l'expression de la force surfacique de viscosité au profil de vitesse dans le cas d'un écoulement parallèle.
Exprimer la dimension du coefficient de viscosité dynamique. Citer l'ordre de grandeur de la viscosité de l'eau.
Citer la condition d'adhérence à l'interface fluide- solide.

→ Écoulement interne incompressible et homogène dans une conduite cylindrique

Décrire les différents régimes d'écoulement (laminaire et turbulent).
Relier le débit volumique à la vitesse débitante.
Décrire qualitativement les deux modes de transfert de quantité de mouvement : convection et diffusion.
Interpréter le nombre de Reynolds comme le rapport d'un temps caractéristique de diffusion de quantité de mouvement sur un temps caractéristique de convection.
Évaluer le nombre de Reynolds et l'utiliser pour caractériser le régime d'écoulement.
Dans le cas d'un écoulement à bas nombre de Reynolds, établir la loi de Hagen-Poiseuille et en déduire la résistance hydraulique.
Exploiter le graphe de la chute de pression en fonction du nombre de Reynolds, pour un régime d'écoulement quelconque.
Exploiter un paramétrage adimensionné permettant de transposer des résultats expérimentaux ou numériques sur des systèmes similaires réalisés à des échelles différentes.

→ Écoulement externe incompressible et homogène autour d'un obstacle

Associer une gamme de nombre de Reynolds à un modèle de traînée linéaire ou un modèle quadratique.
Pour les écoulements à grand nombre de Reynolds décrire qualitativement la notion de couche limite.
Définir et orienter les forces de portance et de traînée. Exploiter les graphes de C_x et C_z en fonction de l'angle d'incidence.