Transfert thermique par conduction

1 Formulation infinitésimale des principes de la thermodynamique

1.1 Premier principe de la thermodynamique

Énoncé vu en première année

→ L'**énergie interne** est une **grandeur extensive** : $U_{1+2} = U_1 + U_2$,
→ L'énergie interne est une **fonction d'état** : à l'équilibre thermodynamique, elle ne dépend que d'un petit nombre de variables d'état.
→ Pour un système **fermé**, évoluant entre deux états d'équilibre, le bilan d'énergie pour le système s'écrit :

$$\Delta (U + E_m) = W + Q$$

Cas d'une transformation infinitésimale

Dans le cas d'une transformation infinitésimale, c'est à dire entre deux états d'équilibre très voisins, le dernier point se réécrit :

$$\boxed{d(U + E_m) = \delta W + \delta Q}$$

Significations des notations :
→ Δ symbolise une différence finie, par exemple $\Delta U = U_f - U_i$, « d » est son équivalent pour les différences infinitésimales, dU signifie que l'on évalue la différence de U entre deux états d'équilibre « très voisins ».
Les écritures $\cancel{dW}$ ou $\cancel{dQ}$ sont donc prohibées ; en effet on ne peut évaluer une différence de travail entre l'état final et l'état initial, le travail étant un transfert d'énergie ayant lieu lors d'une évolution et non une grandeur associée à l'état initial ou final.

→ Le symbole « δ » fait lui simplement référence à une « petite » quantité, ainsi δW représente un travail infinitésimal.

1.2 Deuxième principe de la thermodynamique

Énoncé vu en première année

→ L'**entropie** est une **grandeur extensive** : $S_{1+2} = S_1 + S_2$,
→ L'entropie est une **fonction d'état** : à l'équilibre thermodynamique, elle ne dépend que d'un petit nombre de variables d'état.
→ Pour un système **fermé**, évoluant entre deux états d'équilibre et lors d'une évolution monotherme :

$$\Delta S = S_e + S_c \quad \text{avec} \quad S_e = \frac{Q}{T_0} \quad \text{et} \quad S_c \geq 0 \quad (= 0 \ \text{ si réversible})$$

Cas d'une transformation infinitésimale

Dans le cas d'une transformation infinitésimale, c'est à dire entre deux états d'équilibre infiniment voisins, le dernier point se réécrit :

$$\boxed{dS = \delta S_e + \delta S_c \quad \text{avec} \quad \delta S_e = \frac{\delta Q}{T_0} \quad \text{et} \quad \delta S_c \geq 0}$$

2 Équation de la diffusion thermique

2.1 Les différents modes de transfert thermique

Lorsque deux corps à des températures différentes sont mis en contact thermique, on observe un transfert thermique du corps le plus chaud vers le corps le plus froid qui tend à homogénéiser les températures.

On distingue trois types de transfert thermique : la **conduction**, la **convection** et le **rayonnement**.

La conduction (ou diffusion) thermique

La **conduction** (ou diffusion) thermique correspond à un transfert d'énergie (sous forme thermique) sans mouvement macroscopique de matière.

Exemple : une cuillère en inox plongée dans de l'eau chaude voit son extrémité à l'air libre s'échauffer rapidement. On privilégie une cuillère en bois pour ne pas se brûler. La section et la longueur de l'objet jouent également un rôle important.

Explication : l'agitation microscopique dans le cristal croît avec la température, cette agitation se propage de proche en proche au sein du cristal (*via* les électrons de conduction dans le cas du métal).

La convection thermique

La **convection** thermique correspond à un transfert thermique par mouvement macroscopique du milieu, elle n'est possible que dans un fluide.

Exemple : l'air au voisinage d'un radiateur s'échauffe, cet air plus chaud et moins dense s'élève provoquant un transfert thermique.

Le rayonnement

Le **rayonnement** correspond à un transfert thermique *via* un rayonnement électromagnétique. Contrairement aux deux autres, ce mode de transfert existe même dans le vide.

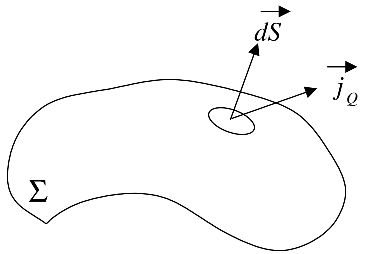
Exemple : le Soleil émet un rayonnement électromagnétique qui transporte de l'énergie (Cf. théorème de Poynting). Plus généralement tout corps chaud émet un rayonnement.

Dans toute la suite, on s'intéressera essentiellement au phénomène de conduction thermique.

2.2 Vecteur densité de courant thermique

Soit une surface élémentaire de vecteur surface $d\vec{S}$, et δQ le transfert thermique qui traverse cette surface pendant dt. On appelle, **vecteur densité volumique de courant thermique**, noté $\vec{j}_Q$, le vecteur défini par :

$$\boxed{\delta Q = \vec{j}_Q . d\vec{S} dt}$$



Dans le système international d'unités, le vecteur courant s'exprime en W.m^{-2}, il représente le transfert thermique qui traverse une section par unité de surface et de temps.

$\delta \Phi = \dfrac{\delta Q}{dt} = \vec{j}_Q . d\vec{S}$ représente le flux thermique élémentaire à travers $d\vec{S}$; par intégration, on obtient **le flux thermique** Φ, flux du vecteur $\vec{j}_Q$ à travers la surface orientée Σ :

$$\boxed{\Phi = \iint_\Sigma \vec{j}_Q . d\vec{S}}$$

2.3 Loi phénoménologique de Fourier

La loi de Fourier rend compte du phénomène de diffusion thermique en reliant le vecteur densité de courant thermique au gradient de température selon :

$$\vec{j}_Q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$$

λ est la conductivité thermique, elle s'exprime en W.m^{-1}.K^{-1}.

Remarques :

⋆ Cette loi est une loi phénoménologique comme la loi d'Ohm locale.

⋆ le coefficient λ est toujours positif, le signe « - » dans la formule assure que la diffusion thermique s'effectue du « chaud vers le froid » (vecteur $\vec{j}_Q$ orienté vers les basses températures).

⋆ La conductivité thermique dépend du matériau et (un peu) de la température.

Matériau	air	eau	béton	acier	polystyrène
λ (W.m^{-1}.K^{-1})	0,026	0,6	$\simeq 1$	16	0,04

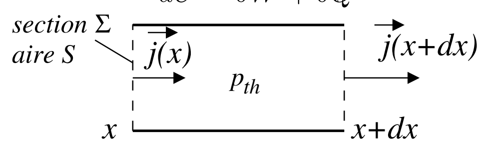
2.4 Bilan d'énergie

Modèle unidirectionnel (géométrie cartésienne)

⋆ On considère un matériau de masse volumique ρ et de capacité thermique massique c, à l'intérieur duquel peuvent exister des sources internes d'énergie (exemples : radioactivité, effet Joule), on note p_{th} la puissance volumique apportée par ces processus.

On applique, entre t et $t + dt$, le premier principe à un élément de longueur dx et de section S.

$$dU = \delta W + \delta Q$$



→ $\delta W = 0$ (approximation du volume constant pour une phase condensée)

→ $dU = \delta m \times c \times dT = (\rho S dx) \times c \times dT \simeq \rho S dx \times c \times \dfrac{\partial T}{\partial t} dt$ (à x fixé)

→ $\delta Q = \delta Q_{\text{flux}} + \delta Q_{\text{source interne}}$

⋆ $\delta Q_{\text{flux}} = j_Q(x,t) S dt - j_Q(x+dx,t) S dt = -\dfrac{\partial j_Q}{\partial x} dx S dt$

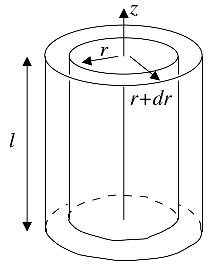
⋆ $\delta Q_{\text{source interne}} = p_{th} dx S dt$

En géométrie cartésienne, pour un problème ne dépendant que d'une variable d'espace, le bilan thermique conduit à l'équation locale :

$$\boxed{\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial j_Q}{\partial x} = p_{th}}$$

Modèle unidirectionnel (géométrie cylindrique)

On considère maintenant un dispositif pour lequel le champ de température admet une invariance par translation et rotation autour d'un axe Oz. La température $T(r,t)$ ne dépend que du temps et de la variable r des coordonnées cylindriques.



Dans une telle configuration le vecteur densité de courant thermique est radial :

$$\vec{j}_Q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T \quad \Rightarrow \quad \vec{j}_Q = -\lambda \frac{\partial T(r,t)}{\partial r} \vec{u}_r$$

On réalise le bilan d'énergie pour un volume infinitésimal compris entre deux cylindres coaxiaux de rayon r et $r + dr$ et de longueur l.

$\rightarrow dU = \rho \times 2\pi r dr l \times c \times \dfrac{\partial T}{\partial t} dt$

$\rightarrow \delta Q = \delta Q_{\text{flux}} + \delta Q_{\text{source interne}}$

$\star\ \delta Q_{\text{flux}} = [\Phi(r,t) - \Phi(r+dr,t)]\, dt = -\dfrac{\partial \Phi(r,t)}{\partial r} dr dt \quad \text{avec} \quad \Phi(r,t) = 2\pi r l j_Q(r,t)$

$\star\ \delta Q_{\text{source interne}} = p_{th} \times 2\pi r dr l \times dt$

En géométrie cylindrique, pour un problème ne dépendant que d'une variable d'espace, le bilan thermique conduit à l'équation locale :

$$\boxed{\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r j_Q(r,t)\right] = p_{th}}$$

Modèle unidirectionnel (géométrie sphérique)

On considère maintenant un dispositif pour lequel le champ de température est à symétrie sphérique. La température $T(r,t)$ ne dépend que du temps et de la variable r des coordonnées sphériques.

Dans une telle configuration le vecteur densité de courant thermique est radial :

$$\vec{j}_Q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T \quad \Rightarrow \quad \vec{j}_Q = -\lambda \frac{\partial T(r,t)}{\partial r} \vec{u}_r$$

On réalise le bilan d'énergie pour un volume infinitésimal compris entre deux sphères concentriques de rayon r et $r + dr$.

$\rightarrow dU = \rho \times 4\pi r^2 dr \times c \times \dfrac{\partial T}{\partial t} dt$

$\rightarrow \delta Q = \delta Q_{\text{flux}} + \delta Q_{\text{source interne}}$

$\star\ \delta Q_{\text{flux}} = [\Phi(r,t) - \Phi(r+dr,t)]\, dt = -\dfrac{\partial \Phi(r,t)}{\partial r} dr dt \quad \text{avec} \quad \Phi(r,t) = 4\pi r^2 j_Q(r,t)$

$\star\ \delta Q_{\text{source interne}} = p_{th} \times 4\pi r^2 dr \times dt$

En géométrie sphérique, pour un problème ne dépendant que d'une variable d'espace, le bilan thermique conduit à l'équation locale :

$$\boxed{\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2 j_Q(r,t)\right] = p_{th}}$$

Généralisation

Le premier principe de la thermodynamique se traduit par la relation locale :

$$\boxed{\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \text{div} \vec{j}_Q = p_{th}}$$

Remarque : cette équation est à rapprocher de l'équation de conservation de la charge. La différence vient du second membre non nul avec la présence d'un terme source.

Pour un système à volume constant, cette loi, simple reformulation du premier principe, est universelle.

2.5 Équation de la diffusion thermique

Expression en présence de sources internes

En substituant la loi de Fourier dans le bilan d'énergie, on obtient :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \text{div}\left(-\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T\right) = p_{th} \quad \text{donc} \quad \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T + p_{th}$$

La température vérifie l'équation de la diffusion thermique :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T + p_{th} \quad \text{ou} \quad \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + p_{th} \quad \text{1D cartésienne}$$

Expression sans terme source

En l'absence de terme source, la température vérifie l'équation de la diffusion thermique :
$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \Delta T \quad \text{ou} \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{1D cartésienne}$$
avec $\kappa = \lambda/(\rho c)$, appelée *diffusivité thermique* ($\mathrm{m^2/s}$).

Commentaires

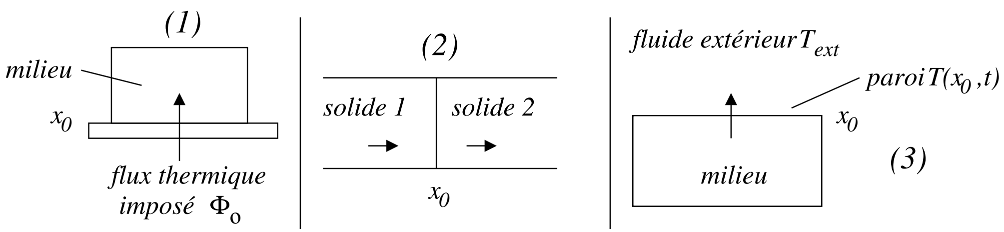
L'équation de la diffusion thermique est une équation aux dérivées partielles dont la résolution est complexe dans le cas le plus général. On peut cependant faire plusieurs remarques :

→ Analyse dimensionnelle : pour un problème donné, soit L la longueur caractéristique et τ la durée d'évolution du phénomène de diffusion thermique. D'une simple analyse dimensionnelle, on déduit, en ordre de grandeur :
$$\frac{T}{\tau} \sim \kappa \frac{T}{L^2} \quad \Leftrightarrow \quad \tau \sim \frac{L^2}{\kappa}$$
Pour atteindre des régions dix fois plus éloignées, un mobile se déplaçant à la vitesse v met 10 fois plus de temps, le phénomène de diffusion met, quand à lui, cent fois plus de temps !
Ceci explique que, dans les gaz ou les liquides, les phénomènes de diffusion soient souvent masqués par les effets convectifs.

→ Irréversibilité : l'inversion du temps ($t \to -t$) ne laisse par l'équation invariante : cela traduit l'irréversibilité physique du phénomène de diffusion.

→ Linéarité : l'équation de diffusion thermique est linéaire à coefficients réels, la représentation complexe peut donc être exploitée dans la recherche de solution.

2.6 Conditions aux limites



L'équation de diffusion dépend du temps et de variables spatiales. Pour la résoudre, il faut disposer de conditions initiales (par exemple : « en $t = 0$, la température est de 295 K ») mais aussi de conditions aux limites (variables spatiales).

Cas d'un flux imposé (1)

⋆ Dans le cas d'un problème unidimensionnel, si on impose un flux Φ_0 à travers une section S située à l'extrémité x_0 du matériau :
$$\Phi_0 = j_Q(x_0,t)S = -S\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{(x_0,t)}$$
En particulier, si la paroi est calorifugée : $\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{(x_0,t)} = 0$.

Contact entre deux solides (2)

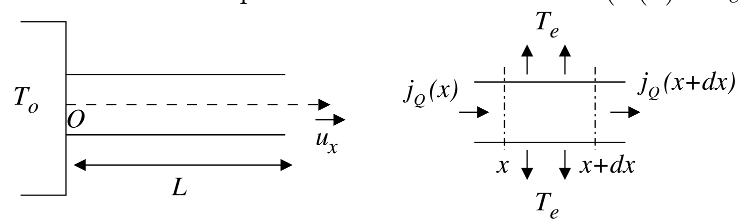
⋆ Dans le cas d'un contact entre deux solides, il ne peut pas y avoir accumulation d'énergie à cette interface, l'égalité des flux thermiques s'écrit :
$$-S\lambda_1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial x}\right)_{(x_0^-,t)} = -S\lambda_2 \left(\frac{\partial T_2}{\partial x}\right)_{(x_0^+,t)}$$
Un contact « parfait » suppose, en outre, l'égalité des températures sur la surface de contact :
$$T_1(x_0^-,t) = T_2(x_0^+,t)$$

Contact avec un fluide (3)

⋆ Les échanges thermiques entre le fluide extérieur (T_{ext}) et la surface du matériau (T) sont souvent modélisés par la **loi de Newton** qui donne le flux sortant à travers une surface unité : $j_Q = h\,[T - T_{ext}]$.

2.7 Exercice d'application : ailette de refroidissement

On s'intéresse à la température au sein d'une ailette de refroidissement (rayon R) et on suppose que la température ne dépend que de x ; au niveau de la surface latérale, les échanges thermiques sont régis par la loi de Newton, la puissance dissipée par un élément de la paroi latérale valant $dP' = h(T(x) - T_e)dS_{lat}$.



On applique le premier principe à un élément de l'ailette situé entre x et $x + dx$. Il faut cependant prendre garde à ne pas oublier le transfert à travers la surface latérale dans le bilan.

$$dU = \rho S dx c \frac{\partial T}{\partial t} dt = j_Q(x,t) S dt - j_Q(x+dx,t) S dt - h\left(T(x,t) - T_e\right) 2\pi R dx dt$$

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial j_Q}{\partial x} - \frac{2h}{R}\left(T(x,t) - T_e\right)$$

En utilisant la loi de Fourier $j_Q(x,t) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$, on en déduit :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{2h}{R}\left(T(x,t) - T_e\right)$$

En supposant le régime stationnaire établi, l'équation se simplifie selon :

$$\frac{d^2 T(x)}{dx^2} - \frac{T(x)}{a^2} = -\frac{T_e}{a^2} \quad \text{avec} \quad a^2 = \frac{\lambda R}{2h}$$

La solution générale de cette équation s'écrit :

$$T(x) = T_e + A \exp(-x/a) + B \exp(x/a) \quad \text{avec} \quad T(0) = T_o$$

Pour une tige de longueur infinie (en pratique $L \gg a$), B est nécessairement nul ; la condition aux limites impose finalement le profil de température au sein de l'ailette :

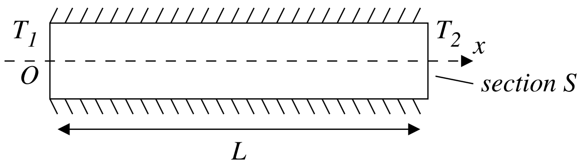
$$T(x) = T_e + (T_o - T_e)\exp(-x/a)$$

On montre que l'ailette dissipe une puissance thermique $P = \dfrac{\lambda \pi R^2 (T_o - T_e)}{a}$.

3 Résistance thermique

3.1 Exemple d'un barreau calorifugé

On se place en <u>**régime permanent**</u> et en l'**absence de sources d'énergie internes**. On considère le cas d'un barreau **calorifugé latéralement** dont les extrémités sont maintenues aux températures T_1 et T_2 ($T_1 > T_2$).



⋆ En régime permanent, l'équation de la diffusion thermique prend la forme simplifiée :

$$\frac{d^2 T(x)}{dx^2} = 0 \quad \text{donc} \quad T(x) = Ax + B$$

Avec $T(0) = T_1$ et $T(L) = T_2$, le profil de température s'écrit :

$$\boxed{T(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L} \times x}$$

⋆ On détermine alors le flux thermique qui traverse la tige :

$$\Phi = \vec{j}_Q . S\vec{u}_x = j_Q S = -\lambda \frac{dT}{dx} S \quad \text{donc} \quad \Phi = \lambda \frac{T_1 - T_2}{L} S$$

On remarque que le flux est indépendant de l'abscisse ; le flux entrant en x doit nécessairement être évacué en $x + dx$, sans cela la température ne pourrait être constante, il y aurait accumulation d'énergie et augmentation de la température.

On constate que le flux thermique est proportionnel à la différence de température, ce qui invite à définir la résistance thermique du barreau :

$$\boxed{R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi} = \frac{L}{\lambda S}}$$

3.2 Généralisation

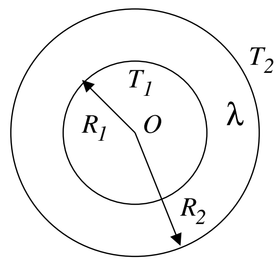
<u>Par analogie avec l'électricité</u>, on définit la **résistance thermique** d'un matériau de conductivité λ maintenu entre deux températures T_1 et T_2 et parcouru par un flux thermique Φ :

$$\boxed{R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi}} \quad \leftrightarrow \quad \left(R_e = \frac{V_1 - V_2}{I}\right)$$

L'exemple précédent a montré que trois conditions sont nécessaires pour définir la notion de résistance thermique :
→ régime permanent, → absence de sources internes, → aucune perte latérale.

On définit également la **conductance thermique** : $G_{th} = \dfrac{1}{R_{th}} = \dfrac{\Phi}{T_1 - T_2}$.

3.3 Exemple d'application : résistance thermique en géométrie sphérique



On considère un matériau limité par deux coquilles sphériques concentriques de rayon R_1 et R_2 et portées respectivement aux températures T_1 et T_2.

On souhaite déterminer la résistance thermique de ce dispositif.

On considère le système limité par deux sphères concentriques de rayon respectif r et $r + dr$.
En régime permanent et en l'absence d'apports en volume, le flux entrant doit égaliser le flux sortant, en conséquence $\Phi(r) = \Phi(r + dr) = \Phi_0$.

Φ_0 est égal au flux du vecteur courant thermique à travers la surface d'une sphère de rayon r quelconque :

$$\Phi_0 = \iint_\Sigma \vec{j}.d\vec{S} = \iint_\Sigma j(r)dS = j(r) \times \iint_\Sigma dS = j(r)4\pi r^2$$

La loi de Fourier conduit à : $j(r) = -\lambda \dfrac{dT(r)}{dr}$.

On en déduit :

$$\Phi_0 = -\lambda \frac{dT(r)}{dr} \times 4\pi r^2 \quad \Leftrightarrow \quad dT = -\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda r^2}dr$$

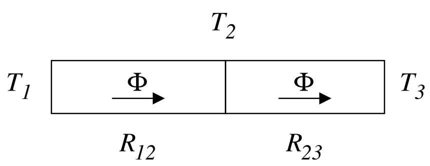
On intègre alors entre R_1 (température T_1) et R_2 (température T_2) :

$$\int_{T_1}^{T_2} dT = \frac{-\Phi_0}{4\pi\lambda}\int_{r=R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2} \quad \Rightarrow \quad T_2 - T_1 = \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda}\left[\frac{1}{r}\right]_{R_1}^{R_2} = \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda}\left[\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right]$$

La résistance thermique est le rapport de l'écart de température sur le flux thermique, avec $T_1 > T_2$ le flux Φ_0 sortant est positif :

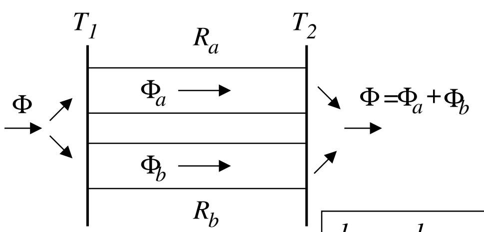
$$T_1 - T_2 = \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda}\left[\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}\right] \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_{th} = \frac{1}{4\pi\lambda}\left[\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}\right]}$$

3.4 Association de résistances thermiques



$\boxed{R_{eq} = R_{12} + R_{23}}$

association série



association parallèle

$\boxed{\dfrac{1}{R_{eq}} = \dfrac{1}{R_a} + \dfrac{1}{R_b}}$

Dans le cas de l'association série, pour déterminer la température T_2, il suffit d'appliquer la formule du pont diviseur de tension :

$$T_2 - T_3 = \frac{R_{23}}{R_{12} + R_{23}}(T_1 - T_3) \quad \text{donc} \quad T_2 = T_3 + \frac{R_{23}}{R_{12} + R_{23}}(T_1 - T_3)$$

Une application importante de l'association série correspond au double vitrage : une couche d'air est emprisonnée entre deux couches de verre.

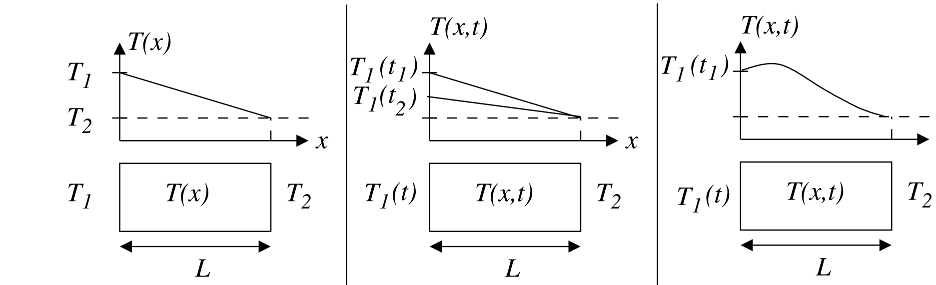
3.5 Approximation des régimes quasi-stationnaires

Condition d'application

→ On sait que les lois de l'électrocinétique, applicables en régime permanent, restent valables pour les régimes lentement variables (ARQS).

→ Cette approximation est transposable au problème de la conduction thermique. Cela suppose que le système ait le temps d'adapter le profil de température réel au profil de température en régime stationnaire.

Précisons cette idée sur l'exemple du barreau conducteur :



cas stationnaire — cas quasi−stationnaire — hors ARQS

⋆ On suppose que la température $T_1(t)$ évolue en un temps caractéristique $\mathcal{T}$ (par exemple la période d'une évolution sinusoïdale).

⋆ La diffusion dans le barreau s'effectue en une durée typique $\tau \sim \dfrac{L^2}{\kappa}$, avec $\kappa = \dfrac{\lambda}{\rho c}$ la diffusivité thermique.

⋆ Pour $\tau \ll \mathcal{T}$, on pourra négliger la durée du régime transitoire et supposer que le barreau se met immédiatement à l'équilibre.

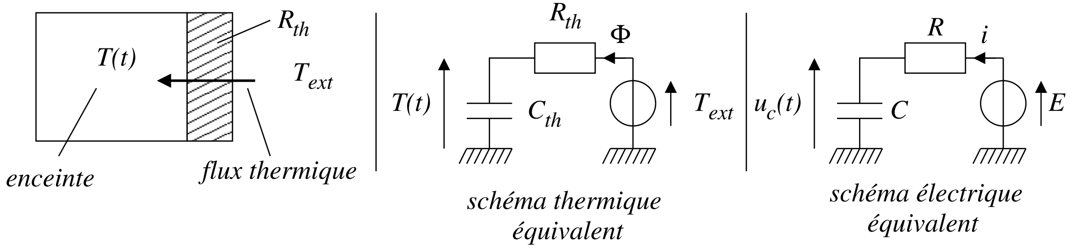
⋆ Hors ARQS, le profil de température dans le barreau n'est plus celui du régime permanent, la notion de résistance thermique n'est plus applicable.

Si $\tau = L^2/\kappa$ la durée caractéristique du régime transitoire dans le matériau est très petite devant $\mathcal{T}$ le temps d'évolution de la perturbation extérieure, l'ARQS est applicable.
En pratique, on peut alors continuer à appliquer la notion de résistance thermique et l'équation de diffusion se limite, en l'absence de sources internes, à $\Delta T = 0$ dans le matériau.

Application : analogie électrocinétique

On considère une enceinte de capacité thermique C_{th} à la température $T(t)$ mise au contact d'une source de chaleur à la température T_{ext} *via* une isolation de résistance thermique R_{th}.

La capacité C_{th} de l'enceinte est supposée suffisante pour que les conditions de l'ARQS soient vérifiées et la notion de résistance thermique applicable.



Problème thermique	Problème électrique
Premier principe enceinte $C_{th}dT = \delta Q = \Phi dt$	caractéristique condensateur $C\dfrac{du_c}{dt} = i$
$\Phi = \dfrac{T_{ext} - T(t)}{R_{th}}$	$i = \dfrac{E - u_c}{R}$
$R_{th}C_{th}\dfrac{dT}{dt} + T = T_{ext}$	$RC\dfrac{du_c}{dt} + u_c = E$

4 Ondes thermiques

Après avoir considéré les cas du régime stationnaire et de l'ARQS, on s'intéresse à un problème nécessitant de prendre en compte l'équation de diffusion sous sa forme générale.

4.1 Présentation du problème

Le sous-sol, situé dans le demi-espace $x > 0$, est considéré comme un milieu semi-infini, homogène, de conductivité thermique λ, de masse volumique ρ et de capacité thermique massique c.

On suppose que la température à la surface du sol ($x = 0$) est soumise à des variations sinusoïdales :

$$T_s(t) = T_0 + \theta_0 \cos(\omega t)$$

En régime forcé, l'évolution de la température en surface va imposer des variations sinusoïdales de température dans le sous-sol. L'équation de diffusion étant linéaire, on peut utiliser une représentation complexe pour la recherche de la solution :

$$\underline{T}(x,t) = T_0 + Ae^{i(\omega t - kx)}$$

4.2 Résolution, équation de dispersion

En l'absence de source interne, la température du sous-sol vérifie l'équation :

$$\frac{\partial \underline{T}}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 \underline{T}}{\partial x^2} \quad \text{avec} \quad \kappa = \frac{\lambda}{\rho c}$$

En reportant la forme proposée pour la température, on en déduit la **relation de dispersion** reliant le vecteur d'onde k à la pulsation ω :

$$\boxed{k^2 = -i\frac{\omega}{\kappa}}$$

En remarquant que $-i = e^{-i\pi/2}$, on en déduit : $k = \pm\dfrac{(1-i)}{x_0}$, avec $x_0 = \sqrt{\dfrac{2\kappa}{\omega}}$.

C'est à dire pour la température :

$$\underline{T}(x,t) = T_0 + Ae^{i\omega t}\left[e^{-i\frac{x}{x_0} - \frac{x}{x_0}}\right]$$

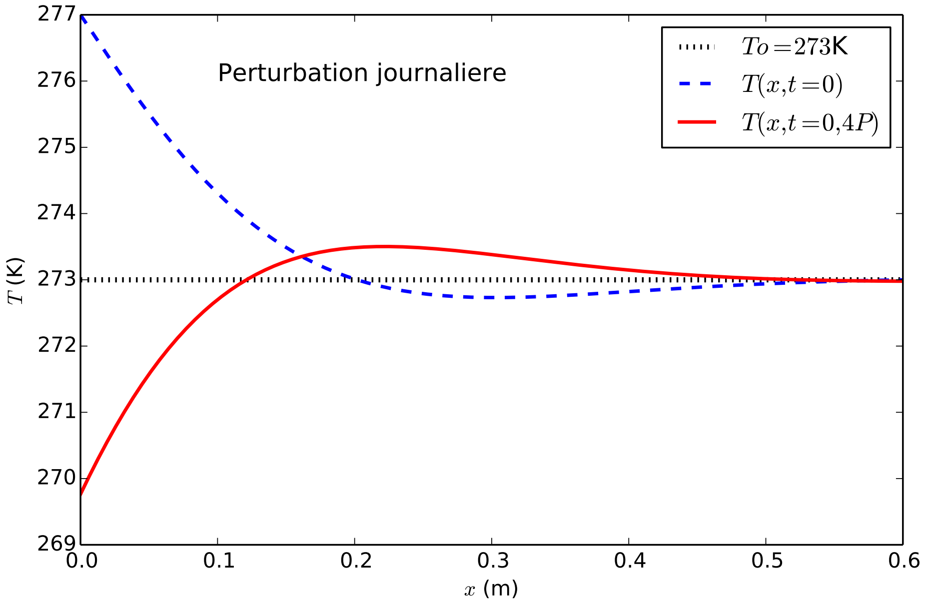
La solution en $-(1-i)/x_0$ n'a pas été retenue car elle entraîne une divergence non réaliste de la température lorsque x devient très grand. En repassant en notation réelle, on obtient :

$$T(x,t) = T_0 + A\exp\left(-\frac{x}{x_0}\right)\cos\left(\omega t - \frac{x}{x_0}\right)$$

La température en $x = 0$ est celle imposée à la surface, ce qui donne $A = \theta_0$; en posant $v = \omega x_0$, on en déduit finalement :

$$T(x,t) = T_0 + \underbrace{\theta_0\exp\left(-\frac{x}{x_0}\right)}_{\text{atténuation}}\underbrace{\cos\left(\omega\left[t - \frac{x}{v}\right]\right)}_{\text{onde}}$$

4.3 Analyse



→ Onde thermique : le terme en cosinus caractérise une onde progressive "$t-x/v$" avec une vitesse de propagation $v = x_0\omega = \sqrt{2\kappa\omega}$. Cette vitesse augmente avec la pulsation, elle est donc plus importante pour les fluctuations journalières que pour les fluctuations annuelles de température.

La comparaison de la fluctuation en surface $\cos(\omega t)$ et en profondeur $\cos(\omega t - x/x_0)$ indique que la température oscille en profondeur avec un retard x/x_0. Ce **déphasage** est dû à la propagation de l'onde, il est forcément absent pour l'ARQS.

→ Atténuation : le terme exponentiel indique un amortissement de la fluctuation avec la profondeur.
L'onde ne se propage que sur une distance de l'ordre de la **longueur caractéristique** x_0.
On parle d'**effet de peau thermique**. Les fluctuations de température ne se ressentent que sur une profondeur de l'ordre de $x_0 = \sqrt{2\kappa/\omega}$.

La distance caractéristique d'atténuation diminue quand la fréquence augmente, les fluctuations journalières ne pénètrent donc quasiment pas dans le sol (x_0 de l'ordre de 10 cm), les fluctuations annuelles un peu plus (x_0 de l'ordre du mètre).

Capacités exigibles :

→ Formulation infinitésimale des principes de la thermodynamique :
Énoncer et exploiter les principes de la thermodynamique pour une transformation élémentaire.
Utiliser avec rigueur les notations d et δ en leur attachant une signification.

→ Équation de la diffusion thermique
Citer les trois modes de transfert thermique.
Expliquer que la diffusion est un déplacement d'énergie de proche en proche dans la matière macroscopiquement immobile.
Exprimer le flux thermique comme le flux du vecteur $\vec{j}_Q$ à travers une surface orientée.
Utiliser les champs scalaires intensifs (volumiques ou massiques) associés à des grandeurs extensives de la thermodynamique.
Énoncer et utiliser la loi de Fourier. Citer quelques ordres de grandeur de conductivité thermique dans les conditions usuelles : air, eau, béton, acier.
Pour un milieu évoluant à volume constant, établir l'équation locale traduisant le premier principe dans le cas d'un problème ne dépendant que d'une seule coordonnée d'espace en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.
Admettre et utiliser une généralisation en géométrie quelconque en utilisant l'opérateur divergence et son expression fournie.
Établir l'équation de diffusion vérifiée par la température, avec ou sans terme source.
Analyser une équation de diffusion en ordre de grandeur pour relier des échelles caractéristiques spatiale et temporelle.
Relier l'équation de diffusion à l'irréversibilité temporelle du phénomène.
Exploiter la linéarité de l'équation de diffusion.
Manipuler le terme source local et intégral de l'effet Joule.
Exploiter la continuité du flux thermique.
Exploiter la continuité de la température pour un contact thermique parfait. Utiliser la relation de Newton (fournie) à l'interface solide-fluide. Traduire le contact avec une paroi calorifugée.

→ Régime stationnaire, ARQS
Définir la notion de résistance thermique par analogie avec l'électrocinétique. Énoncer les conditions d'application de l'analogie.
Établir l'expression de la résistance thermique d'un cylindre calorifugé latéralement.
Exploiter des associations de résistances thermiques en série ou en parallèle.
Mettre en évidence un temps caractéristique d'évolution de la température. Justifier l'ARQS. Établir l'analogie avec un circuit électrique RC.

→ Ondes thermiques
Établir la relation de dispersion des ondes thermiques en géométrie unidirectionnelle.
Mettre en évidence le déphasage lié à la propagation.
Établir une distance caractéristique d'atténuation.