Lycée Naval, Spé 2.
Analyse vectorielle.

Outils mathématiques (formulaire)

Ce document résume les principaux outils mathématiques utiles en sciences physiques cette année. Les formules seront abordées progressivement, au fil des chapitres.
Seules les formules encadrées sont à retenir.

1 Analyse vectorielle

1.1 Champ scalaire, champ vectoriel

On appelle **champ**, une grandeur physique qui est une fonction de la position et éventuellement du temps. Un champ peut être scalaire, on le note $V(M,t)$ (pression, température,...) ou vectoriel, $\vec{A}(M,t)$ (vecteur champ électrique, vecteur champ magnétique,...).

1.2 Opérateurs agissant sur des champs

L'opérateur gradient

→ Le gradient agit sur un champ scalaire et renvoie un champ de vecteurs :

$$\boxed{\overrightarrow{\text{grad}}\ V = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{u}_z}$$

→ Pour deux points voisins distants de $\vec{dl}$, le gradient et la différentielle du champ scalaire sont reliés par :

$$\boxed{dV = \overrightarrow{\text{grad}}\ V.\vec{dl} = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz}$$

L'opérateur divergence

→ L'opérateur divergence agit sur un champ de vecteurs et renvoie un champ scalaire :

$$\boxed{\text{div}\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}}$$

L'opérateur rotationnel

⋆ L'opérateur rotationnel agit sur un champ de vecteurs et renvoie un champ de vecteurs :

$$\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{u}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{u}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{u}_z}$$

L'opérateur laplacien

⋆ L'opérateur laplacien agit sur un champ scalaire et renvoie un champ scalaire :

$$\boxed{\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}}$$

L'opérateur laplacien vectoriel

⋆ L'opérateur laplacien vectoriel agit sur un champ de vecteurs et renvoie un champ de vecteurs :

$$\boxed{\vec{\Delta}\vec{A} = \begin{pmatrix} \Delta A_x \\ \Delta A_y \\ \Delta A_z \end{pmatrix}}$$

Pour les autres systèmes de coordonnées, un formulaire sera fourni lors de l'épreuve. Nous indiquons les formules à titre indicatif.

Coordonnées cylindriques

⋆ Gradient :

$$\boxed{\overrightarrow{\text{grad}}\ V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{u}_z}$$

⋆ Divergence :

$$\text{div}\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial (rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

⋆ Rotationnel :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{u}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{u}_\theta + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{u}_z$$

⋆ Laplacien :

$$\Delta V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Coordonnées sphériques

⋆ Gradient :

$$\boxed{\overrightarrow{\text{grad}}\ V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi}$$

⋆ Divergence :

$$\text{div}\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2 A_r\right)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(\sin\theta A_\theta\right)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$$

⋆ Rotationnel :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial\left(\sin\theta A_\varphi\right)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\vec{u}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial\left(rA_\varphi\right)}{\partial r}\right)\vec{u}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\left(rA_\theta\right)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\vec{u}_\varphi$$

⋆ Laplacien :

$$\Delta V = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(rV\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}$$

1.3 Composition des opérateurs

$$\boxed{\text{div}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}\right) = 0} \qquad \boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{grad}}V\right) = \vec{0}}$$

$$\boxed{\text{div}\left(\overrightarrow{\text{grad}}V\right) = \Delta V} \qquad \boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}\right) = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\text{div}\vec{A}\right) - \Delta\vec{A}}$$

1.4 Autres relations utiles

$$\boxed{\text{div}\left(\vec{A}\wedge\vec{B}\right) = \vec{B}.\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A} - \vec{A}.\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B}}$$

$$\text{div}\left(V\vec{A}\right) = V\text{div}\vec{A} + \left(\overrightarrow{\text{grad}}V\right).\vec{A}$$

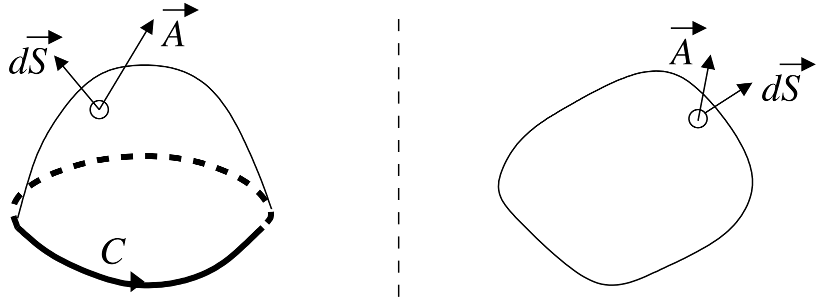
$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(V\vec{A}\right) = V\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A} + \left(\overrightarrow{\text{grad}}V\right)\wedge\vec{A}$$

1.5 Action des opérateurs sur un champ associé à une onde plane progressive harmonique

Pour des champs de la forme $\underline{V} = \underline{V}_o e^{j\omega t - j\vec{k}.\vec{r}}$ et $\underline{\vec{A}} = \underline{\vec{A}}_o e^{j\omega t - j\vec{k}.\vec{r}}$

$$\boxed{\overrightarrow{\text{grad}}\underline{V} = -j\vec{k}\underline{V}} \qquad \boxed{\overrightarrow{\text{div}}\underline{\vec{A}} = -j\vec{k}.\underline{\vec{A}}} \qquad \boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\underline{\vec{A}} = -j\vec{k}\wedge\underline{\vec{A}}} \qquad \boxed{\Delta\underline{V} = -k^2\underline{V}}$$

1.6 Transformation de domaine d'intégration



théorème de Stokes
(orientation de la surface conformément à C)

théorème d'Ostrogradski

Théorème d'Ostrogradski

Le flux d'un champ de vecteurs $\vec{A}$ à travers une surface Σ fermée et orientée vers l'extérieur est égal à l'intégrale de sa divergence, étendue au volume V délimité par Σ :

$$\oiint_\Sigma \vec{A}.d\vec{S} = \iiint_V \text{div}\vec{A}\ dv$$

Théorème de Stokes

Le circulation d'un champ de vecteurs $\vec{A}$ le long d'un contour $\mathcal{C}$ est égale au flux du rotationnel de $\vec{A}$ à travers une surface orientée s'appuyant sur $\mathcal{C}$:

$$\oint_\mathcal{C} \vec{A}.d\vec{l} = \iint_\Sigma \overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}.d\vec{S}$$

2 Fonction de plusieurs variables

Soit f une fonction de plusieurs variables : $f : (x_1, x_2, \ldots) \mapsto f(x_1, x_2, \ldots)$

2.1 Dérivée partielle

Dériver f partiellement par rapport à x_1 consiste à dériver la fonction f par rapport à x_1, les autres variables étant fixées :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_1+h, x_2, \ldots) - f(x_1, x_2, \ldots)}{h}$$

2.2 Théorème de Schwarz

Si les dérivées partielles de f sont continues, la dérivée partielle à l'ordre deux de f ne dépend pas de l'ordre de dérivation :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)}$$

2.3 Différentielle d'une fonction de plusieurs variables

$$\boxed{df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i}$$

2.4 Intégration de l'expression d'une dérivée partielle

Considérons une expression du type :

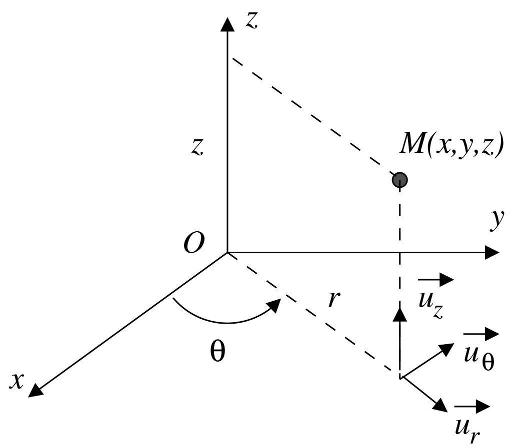
$$\frac{\partial f}{\partial y} = P(x,y)$$

Pour déterminer une expression de f par intégration, on cherche une primitive de P considérée comme une fonction de la variable y à x fixé. Il faut alors faire attention, la constante d'intégration étant *a priori* une fonction de x :

$$f(x,y) = \int P(x,y)dy + K(x)$$

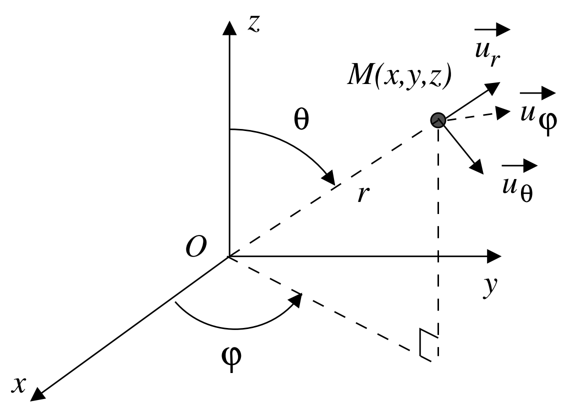
3 Systèmes de coordonnées (Rappel)

3.1 Coordonnées cylindriques



Volume infinitésimal : $dV = dr \times rd\theta \times dz$

3.2 Coordonnées sphériques



Volume infinitésimal : $dV = dr \times rd\theta \times r\sin\theta d\varphi$