Lycée Naval, Spé 2.
Électronique. 01. Stabilité des systèmes linéaires.

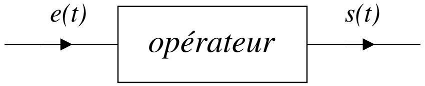
Stabilité des systèmes linéaires

1 Système linéaire invariant

1.1 Définitions

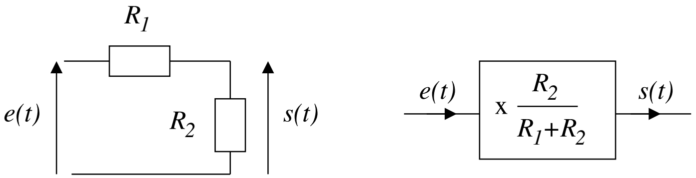
Opérateur

Le système physique sera considéré comme un **opérateur** qui, à un signal d'entrée $e(t)$, associe un signal de sortie $s(t)$.



Représentation schématique d'un opérateur

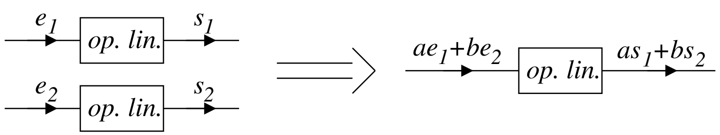
Exemple : pont diviseur de tension



Remarque : un signal représente toute grandeur physique mesurable.

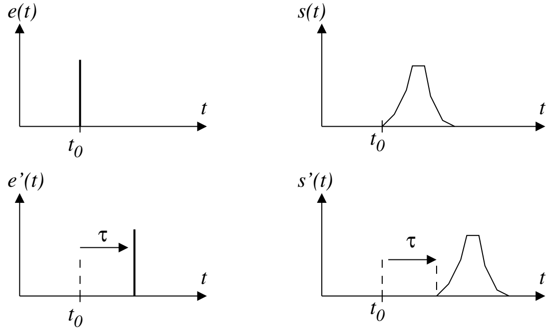
Linéarité

On appelle $e_1(t)$ et $e_2(t)$ deux signaux d'entrée et $s_1(t)$ et $s_2(t)$ les signaux de sortie associés. Le système S est linéaire si, pour une excitation $ae_1(t)+be_2(t)$, la réponse s'écrit $as_1(t)+bs_2(t)$.



Caractère invariant

Un système est dit **invariant** (ou permanent) si ses caractéristiques ne varient pas au cours du temps. Une translation dans le temps sur le signal d'entrée se traduit par une translation identique sur le signal de sortie.



1.2 Système régi par une équation différentielle

Un système linéaire permanent sera caractérisé par une équation différentielle de la forme :

$$b_0 s(t) + \sum_{k=1}^{m} b_k \frac{d^k s(t)}{dt^k} = a_0 e(t) + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{d^i e(t)}{dt^i}$$

où les coefficients a_i et b_k sont des constantes.

Remarques :

⋆ Une telle équation différentielle **linéaire** à coefficients *constants* assure les caractères **linéaire** et *invariant* du système.

⋆ Il existe des opérateurs linéaires qui ne sont pas régis par ce type d'équation, on peut citer l'opérateur "retard" tel que $s(t) = e(t-\tau)$.

Exemple :

Considérons la réponse en tension aux bornes du condensateur pour un circuit RLC série soumis à un échelon de tension E :

$$\forall t > 0 \quad \frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{du_c}{dt} + \omega_0^2 u_c = \omega_0^2 E$$

2 Réponse fréquentielle et fonction de transfert

2.1 Rappels sur le régime sinusoïdal forcé

On considère un signal d'entrée sinusoïdal de la forme :

$$e(t) = E\cos(\omega t + \varphi_e)$$

auquel on associe la représentation complexe : $\underline{e}(t) = Ee^{j(\omega t+\varphi_e)} = \underline{E}e^{j\omega t}$

Pour un **système linéaire**, en régime forcé, le signal de sortie est un signal sinusoïdal, de **même pulsation** que le signal d'entrée, de la forme :

$$s(t) = S\cos(\omega t + \varphi_s)$$
auquel on associe la représentation complexe : $\underline{s}(t) = Se^{j(\omega t + \varphi_e)} = \underline{S}e^{j\omega t}$

Remarques :
⋆ Le caractère linéaire et les coefficients réels de l'équation différentielle assurent l'équivalence de l'étude en représentation complexe ou réelle.
⋆ La solution générale $s(t)$ est la somme de deux termes : la solution du régime **transitoire** (solution générale sans second membre) et la solution **forcée** (solution particulière avec second membre).
⋆ On suppose pour l'instant que le régime transitoire s'atténue rapidement laissant la place à la solution associée au régime forcé. Cet aspect sera approfondi dans le paragraphe "stabilité" de ce chapitre.

2.2 Fonction de transfert

En régime sinusoïdal forcé, on définit la fonction de transfert (ou transmittance) selon :
$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}}$$
ou de façon équivalent avec $p = j\omega$, imaginaire pur :
$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$$

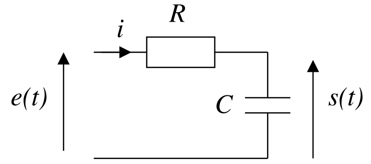
La fonction de transfert est caractérisée par :
⋆ son amplitude (le gain) : $|\underline{H}| = \dfrac{|\underline{S}|}{|\underline{E}|}$,
⋆ sa phase : $\arg \underline{H} = \varphi_s - \varphi_e$

2.3 Équivalence : équation différentielle et fonction de transfert

Pour la représentation complexe, $\dfrac{d\underline{s}(t)}{dt} = j\omega \underline{s}(t)$. Si le système est régi par une équation différentielle linéaire à coefficients constants réels :
$$b_0\underline{s} + \sum_{k=1}^{m} b_k \frac{d^k\underline{s}}{dt^k} = a_0\underline{e} + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{d^i\underline{e}}{dt^i}$$
alors on peut écrire :
$$\underline{s} \times \sum_{k=0}^{m} b_k (j\omega)^k = \underline{e} \times \sum_{i=0}^{n} a_i (j\omega)^i$$
On en déduit l'expression de la fonction de transfert :
$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i (j\omega)^i}{\sum_{k=0}^{m} b_k (j\omega)^k} \quad \text{ou} \quad H(p) = \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i \times p^i}{\sum_{k=0}^{m} b_k \times p^k}$$

opérationnel	$\leftrightarrow$	fréquentiel	$\leftrightarrow$	temporel
p	$\leftrightarrow$	$j\omega$	$\leftrightarrow$	$\dfrac{d}{dt}$
p^2	$\leftrightarrow$	$(j\omega)^2 = -\omega^2$	$\leftrightarrow$	$\dfrac{d^2}{dt^2}$

Exemple :



$$e(t) = s(t) + \tau\frac{ds(t)}{dt} \quad \leftrightarrow \quad H(p) = \frac{1}{1+\tau p}$$

3 Filtrage et décomposition harmonique (rappels)

3.1 Représentation de Bode de la fonction de transfert

Principe

Il s'agit de représenter, en fonction du logarithme de la fréquence (ou de la pulsation) :
⋆ le gain en décibel : $G_{dB} = 20\log|\underline{H}|$
⋆ le déphasage : $\varphi = \arg \underline{H}$

Remarque :
Si on peut écrire $\underline{H} = \underline{H}_1.\underline{H}_2$:
alors $G_{dB} = G_{dB1} + G_{dB_2}$ et $\arg \underline{H} = \arg(\underline{H}_1) + \arg(\underline{H}_2)$
Cela signifie que la représentation de Bode de $\underline{H}$ se construit comme l'addition (selon l'axe des ordonnées) des représentations de Bode de $\underline{H}_1$ et $\underline{H}_2$, tant pour le gain en décibel que pour la phase.

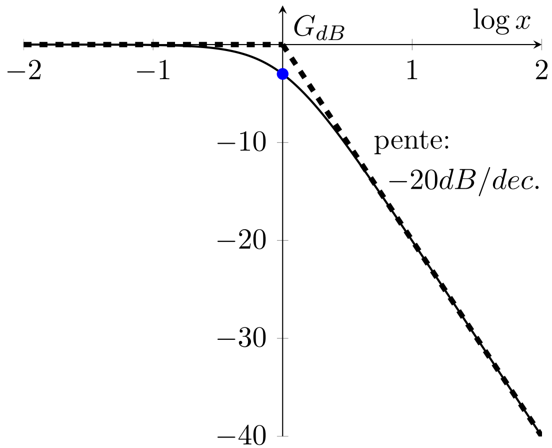
Tracé asymptotique

On considère à nouveau l'exemple du circuit RC, passe-bas d'ordre 1.

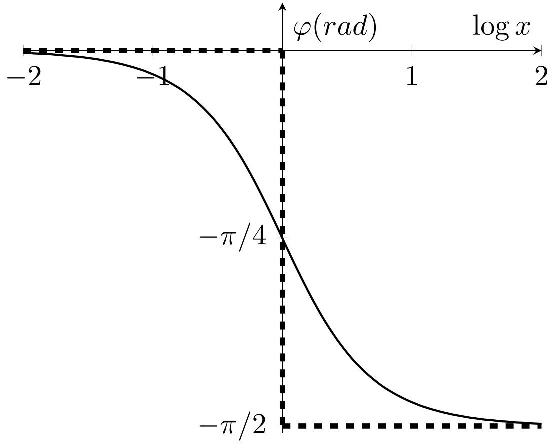
La fonction de transfert est de la forme : $\underline{H} = \dfrac{1}{1+j\omega\tau} = \dfrac{1}{1+jx}$ avec $x = \omega\tau$.

Ce qui donne pour le gain en décibel : $G_{dB} = -10\log\left(1+x^2\right)$
⋆ À basse fréquence $G_{dB} \to 0$ (les signaux de basse fréquence sont conservés)
⋆ À haute fréquence $G_{dB} \sim -20\log x$ (les signaux de haute fréquence sont fortement atténués)

La fréquence de coupure à -3dB est caractérisée par $|\underline{H}|(x_c) = |\underline{H}|_{max}/\sqrt{2}$, soit $x_c = 1$ pour ce filtre.



Pour la phase : $\varphi = -\arg(1+jx) = -\arctan x$



Le filtre sélectionne les basses fréquences, il s'agit d'un filtre passe-bas du 1er ordre (pente -20dB/dec).

3.2 Décomposition en série de Fourier

Soit $v(t)$ un signal T-périodique tel que $v(t+T) = v(t)$; en posant $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$, il est possible de décomposer $v(t)$ en une somme de termes sinusoïdaux de pulsation multiple de ω_0 dite *série de Fourier* :

$$\boxed{v(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos(k\omega_0 t) + B_k\sin(k\omega_0 t)\right)}$$

⋆ Le terme fondamental est associé au terme d'ordre $k = 1$.
⋆ Les termes suivants constituent les harmoniques de rang k.
⋆ Pour une fonction paire, les coefficients B_k sont nuls,
⋆ Pour une fonction impaire, les coefficients A_k sont nuls.

Remarque : les coefficients de ce développement sont donnés par :

$$A_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} v(t)dt \text{ (valeur moyenne de } v\text{)}$$

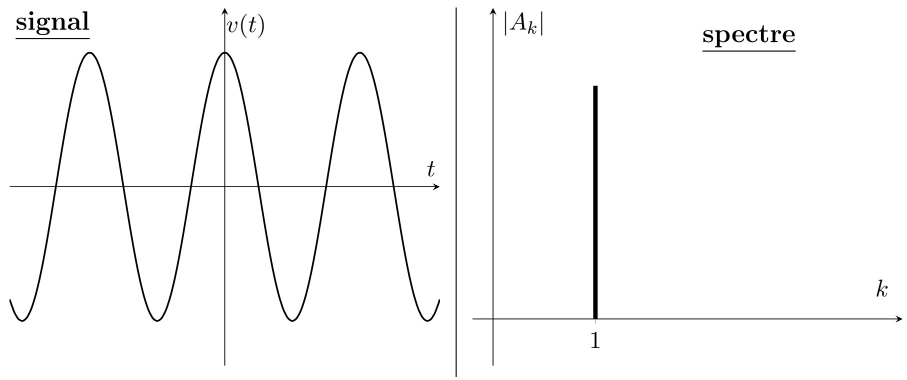
$$A_k = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} v(t)\cos(k\omega_0 t)dt \quad \text{et} \quad B_k = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} v(t)\sin(k\omega_0 t)dt$$

Ces formules ne sont pas à retenir et l'objectif n'est pas de calculer explicitement ces coefficients.

Exemples :

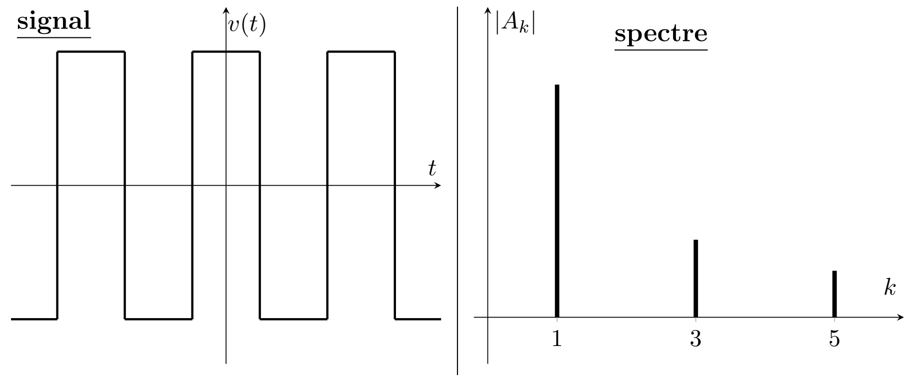
→ Signal sinusoïdal :

Un signal sinusoïdal est directement sous sa forme décomposée :



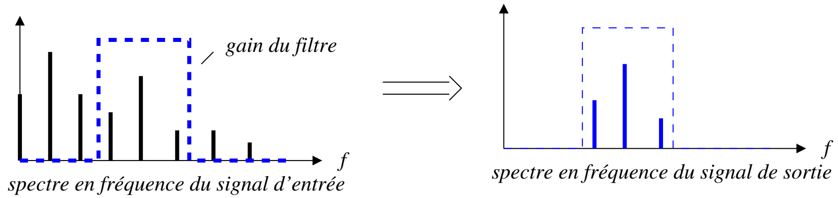
Signal créneau :

Les coefficients d'un signal créneau pair valent : $\forall k \geq 0, \;\; A_{2k+1} = \dfrac{4E \times (-1)^k}{(2k+1)\,\pi}$

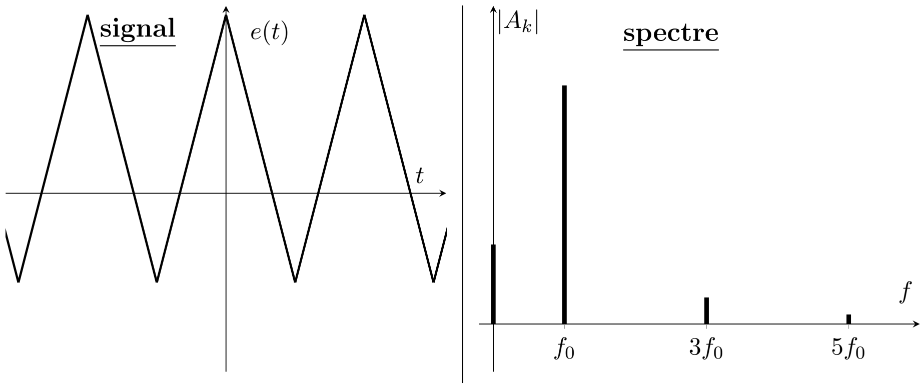


3.3 Effet d'un filtre sur un signal périodique

Principe :
En comparant la bande passante d'un filtre au spectre en fréquence du signal d'entrée, il est possible de déterminer l'effet d'un filtre sur un signal périodique :

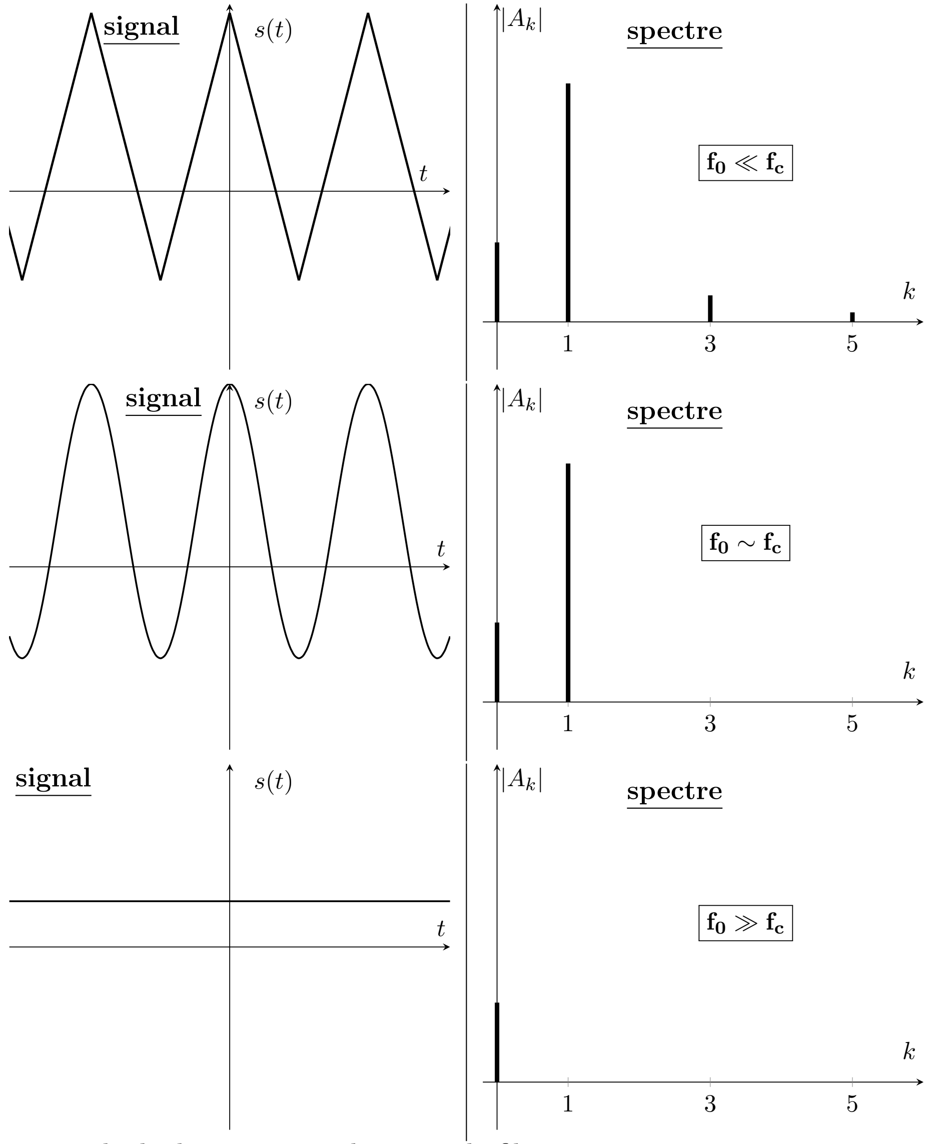


Signal d'entrée :



Exemple :
Considérons l'effet d'un filtre passe-bas idéal sur le signal d'entrée, signal triangulaire de moyenne non nulle.
On note f_0 la fréquence fondamentale du signal et f_c la fréquence de coupure du filtre.

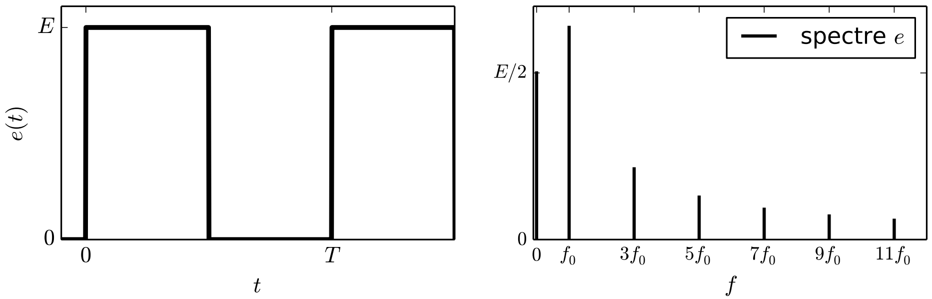
Signal de sortie :



Les éventuels déphasages introduits par le filtre ont été ignorés.

Exercice d'application :

On considère un signal créneau de moyenne non nulle dont on a représenté l'évolution temporelle et le spectre en fréquence.



La décomposition en série de Fourier de ce signal de période $T = 2\pi/\omega_0$ s'exprime selon :

$$e(t) = \frac{E}{2} + \frac{2E}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin\left([2k+1]\,\omega_0 t\right)$$

On applique à ce signal un filtre passe-bas du premier ordre de fonction de transfert :

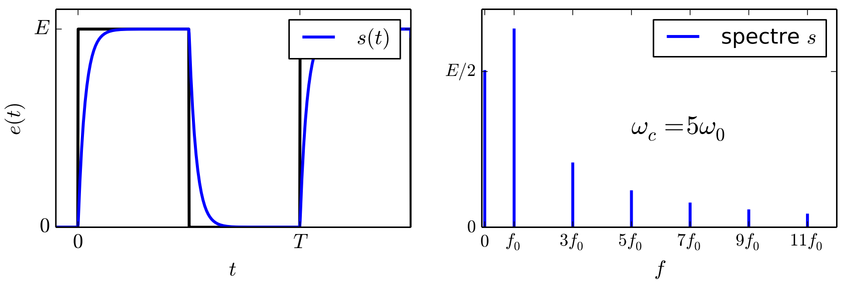
$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega} = \frac{1}{1 + j\omega/\omega_c}$$

Très généralement, on obtient le signal de sortie en appliquant la fonction de transfert à chacune des composantes du signal (avec $\omega_k = (2k+1)\omega_0$) :

$$s(t) = \frac{E}{2} + \frac{2E}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_k}{\omega_c}\right)^2}} \times \frac{1}{2k+1} \sin\left(\omega_k t - \arctan\left(\frac{\omega_k}{\omega_c}\right)\right)$$

→ Quelques cas particuliers :

⋆ Premier cas : $\omega_c = 5\omega_0$



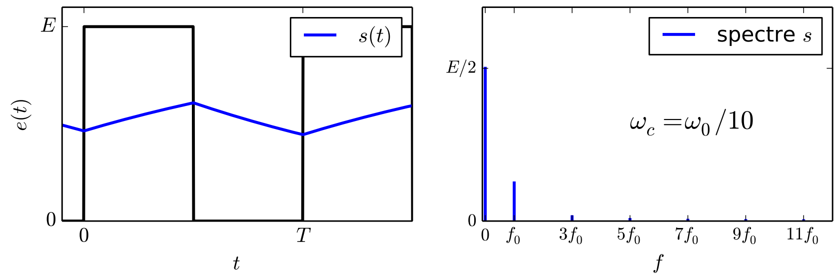
Analyse fréquentielle : le signal est peu affecté par le filtre.
En sortie, seuls les harmoniques de rang élevé sont affectés, ce qui explique la difficulté de suivre les variations rapides du signal d'entrée.

Analyse temporelle : l'équation différentielle associée à la fonction de transfert s'écrit :

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = e(t) \quad \text{avec} \quad \tau = RC = \frac{T}{2} \times \frac{1}{5\pi} \ll \frac{T}{2}$$

L'équation différentielle est celle d'un circuit RC série soumis à un échelon de tension. Comme $\tau \ll T$, on observe la charge et la décharge complètes du condensateur.

⋆ Second cas : $\omega_c = \omega_0/10$



Pour l'analyse, il est préférable de décomposer le signal d'entrée en la somme de sa composante continue $e_1(t) = E/2$ et e_2 un signal créneau d'amplitude $E/2$ et de moyenne nulle.

Analyse fréquentielle :
La composante continue n'est pas affectée par le filtre, en effet $\underline{H}(0) = 1$.
Comme $\omega_c \ll \omega_0$, les autres composantes sont très fortement atténuées, il reste une légère ondulation affine autour de la valeur moyenne.

Analyse temporelle : (comportement intégrateur)

Pour toutes les fréquences de e_2, $\omega_k = (2k+1)\omega_0 \gg \omega_c$, et la fonction de transfert prend la forme :

$$\frac{\underline{s_2}}{\underline{e_2}} \simeq \frac{1}{j\omega/\omega_c} \quad \Rightarrow \quad j\omega\underline{s}_2 = \omega_c \underline{e}_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{ds_2(t)}{dt} = \omega_c e_2(t)$$

Avec e_2 fonction constante par morceaux, le signal de sortie fluctue autour de sa valeur moyenne selon une ondulation affine d'amplitude totale sur une demi-période :

$$\Delta s = \omega_c \times \frac{E}{2} \times \frac{T}{2} \quad \Rightarrow \quad \Delta s = \frac{\omega_0}{10} \times \frac{E}{2} \times \frac{\pi}{\omega_0} = \frac{\pi E}{20}$$

4 Stabilité

On considère un système linéaire décrit, en représentation temporelle ou opérationnelle, sous la forme :

$$b_0 s(t) + \sum_{k=1}^{m} b_k \frac{d^k s(t)}{dt^k} = a_0 e(t) + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{d^i e(t)}{dt^i}$$

$$H(p) = \frac{s(p)}{e(p)} = \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i \times p^i}{\sum_{k=0}^{m} b_k \times p^k}$$

4.1 Critère de stabilité

Énoncé

Un système d'ordre 1 ou 2 ($m = 1$ ou $m = 2$) est stable si les coefficients b_0, b_1 et b_2 sont de même signe.

Justification

La solution associée au régime transitoire vérifie l'équation :

$$b_0 s(t) + b_1 \frac{ds(t)}{dt} + b_2 \frac{d^2 s(t)}{dt^2} = 0$$

Le système est stable si la solution du régime transitoire est amortie. C'est le cas si les coefficients sont tous de même signe. Dans le cas contraire, la solution du régime transitoire diverge jusqu'à saturation ou dégradation du système.

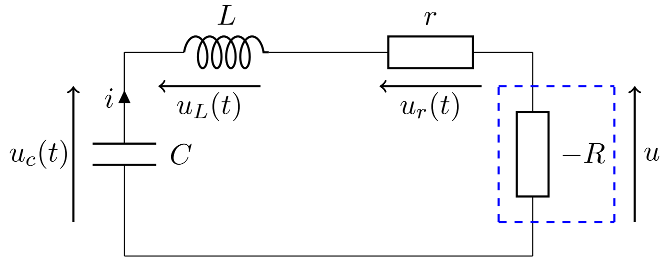
Cas d'un système du premier ordre avec $s(0) = s_0$

$\rightarrow s(t) + \tau \dfrac{ds(t)}{dt} = 0 \Rightarrow s(t) = s_0 e^{-t/\tau} \Rightarrow$ système stable

$\rightarrow s(t) - \tau \dfrac{ds(t)}{dt} = 0 \Rightarrow s(t) = s_0 e^{t/\tau} \Rightarrow$ système instable

4.2 Application : oscillateur à résistance négative

On considère le circuit représenté ci-après. Le dispositif encadré en pointillés sera décrit dans un prochain chapitre ; à ce stade il suffit de savoir, qu'en fonctionnement linéaire, sa caractéristique est celle d'une "résistance négative" : $u = -Ri$.

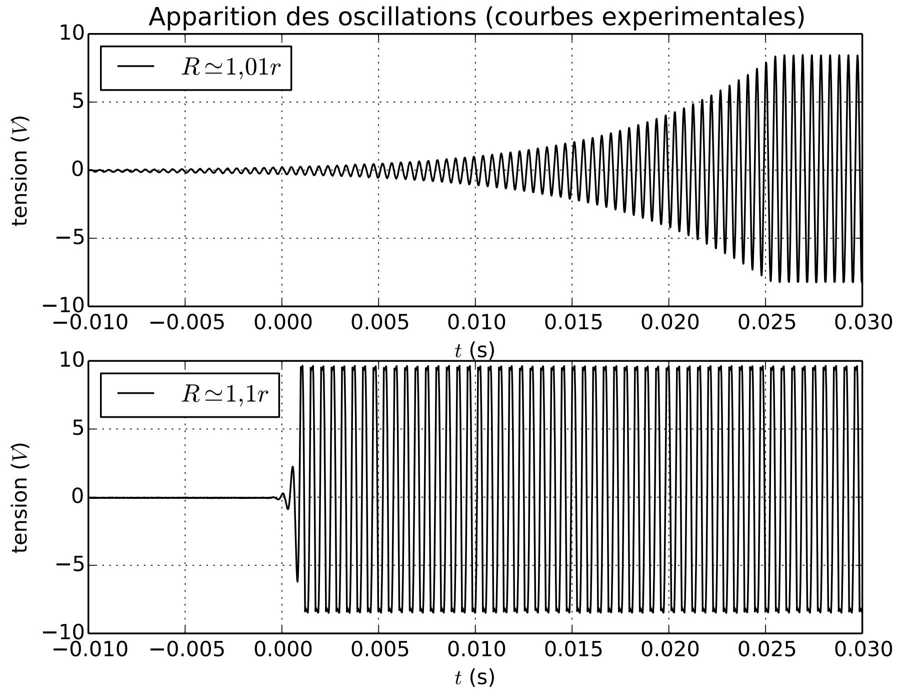


Équation différentielle :
La tension aux bornes du condensateur vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} + \frac{(r-R)}{L} \times \frac{du_c(t)}{dt} + \frac{1}{LC} u_c(t) = 0$$

Solutions :

$\rightarrow r < R$: système instable, les apports dominent les pertes. La solution du régime transitoire est exponentiellement croissante mais limitée en amplitude par les non-linéarités du système.



On constate que le système tend d'autant plus vite vers la saturation que les apports ("$-R$") l'emportent sur les pertes ("r").

$\rightarrow r = R$: cas limite théorique de l'oscillateur harmonique, l'équation se simplifie selon :

$$\frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} + \frac{1}{LC} u_c(t) = 0$$

La solution est une oscillation purement sinusoïdale.

$\rightarrow r > R$: système stable, les pertes dominent les apports. La solution du régime transitoire est atténuée exponentiellement.
Les oscillations ne peuvent pas apparaître.

Capacités exigibles :

$\rightarrow$ Transposer la fonction de transfert opérationnelle dans les domaines fréquentiel (fonction de transfert harmonique) ou temporel (relation différentielle).

$\rightarrow$ Discuter la stabilité d'un système d'ordre 1 ou 2 d'après les signes des coefficients de la relation différentielle ou de la fonction de transfert.