Bilans macroscopiques

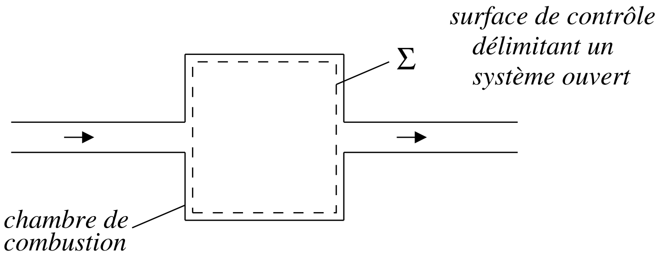
1 Principe

1.1 Position du problème

Appliquer des théorèmes mécaniques ou énergétiques à un fluide en écoulement nécessite de combiner deux notions antagonistes :

⋆ Les lois de la mécanique (théorème de la résultante cinétique, théorème du moment cinétique,...) comme les principes de thermodynamique s'appliquent à des **systèmes fermés**.

⋆ Le fluide contenu dans une zone donnée de l'écoulement (une chambre de combustion, le voisinage d'une éolienne,...) constitue un **système ouvert**.



Dans la suite de ce paragraphe, nous allons montrer comment concilier ces deux notions.

1.2 Conditions de l'étude

⋆ Le fluide, lors de son écoulement, traverse une zone (chambre de combustion, échangeur, turbine,...) dans laquelle il subit une transformation quelconque.

⋆ On suppose l'écoulement unidimensionnel : en amont et en aval, les caractéristiques de l'écoulement sont uniformes sur une section droite.

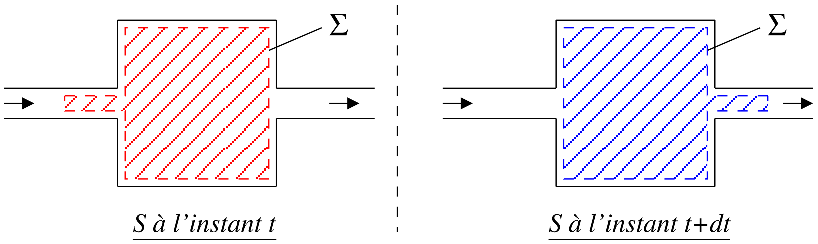
⋆ le régime est stationnaire : dans leur globalité, les caractéristiques de l'écoulement ne dépendent pas explicitement du temps.

1.3 Méthode

Soit un fluide en écoulement. On considère le **système fermé** $\mathcal{S}$ défini de la façon suivante :

⋆ à l'instant t : le fluide contenu à l'intérieur de Σ + le fluide qui va entrer dans Σ entre t et $t + dt$,

⋆ à l'instant $t + dt$: le fluide contenu à l'intérieur de Σ + le fluide qui est sorti de Σ entre t et $t + dt$.



On s'intéresse à une grandeur extensive $\mathcal{A}$ décrivant le fluide (quantité de mouvement, énergie cinétique, énergie mécanique, enthalpie, entropie,...)

⋆ À l'instant t, la grandeur $\mathcal{A}$ associée au système $\mathcal{S}$ peut s'écrire :
$$\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}_\Sigma(t) + \delta_e\mathcal{A}$$
Avec $\mathcal{A}_\Sigma(t)$, la grandeur $\mathcal{A}$ associée au fluide contenu dans Σ à l'instant t et $\delta_e\mathcal{A}$, la grandeur $\mathcal{A}$ associée au fluide qui va entrer dans Σ pendant dt.

⋆ À l'instant $t + dt$, la grandeur $\mathcal{A}$ associée au système $\mathcal{S}$ peut s'écrire :
$$\mathcal{A}(t + dt) = \mathcal{A}_\Sigma(t + dt) + \delta_s\mathcal{A}$$
Avec $\mathcal{A}_\Sigma(t+dt)$, la grandeur $\mathcal{A}$ associée au fluide contenu dans Σ à l'instant $t+dt$ et $\delta_s\mathcal{A}$, la grandeur $\mathcal{A}$ associée au fluide qui est sortie de Σ pendant dt.

On peut alors en déduire la variation de $\mathcal{A}$ pour le système S entre t et $t + dt$:
$$d\mathcal{A} = \mathcal{A}(t + dt) - \mathcal{A}(t) = \underbrace{\mathcal{A}_\Sigma(t + dt) - \mathcal{A}_\Sigma(t)}_{=0 \text{ (régime permanent)}} + \delta_s\mathcal{A} - \delta_e\mathcal{A}$$
$$\boxed{d\mathcal{A} = \delta_s\mathcal{A} - \delta_e\mathcal{A}}$$
En régime stationnaire, la variation de la grandeur $\mathcal{A}$ pour le système S se ramène aux quantités qui entrent et sortent et qui sont facilement accessibles à l'expérience.

1.4 Conservation du débit massique

En régime stationnaire, il y a conservation du débit massique : $\boxed{D_{m,e} = D_{m,s}}$.
Sans cela, la masse située dans la surface de contrôle varierait au cours du temps en contradiction avec le caractère stationnaire de l'écoulement.

2 Bilans thermodynamiques

2.1 Premier principe pour un écoulement stationnaire

Principe de l'étude

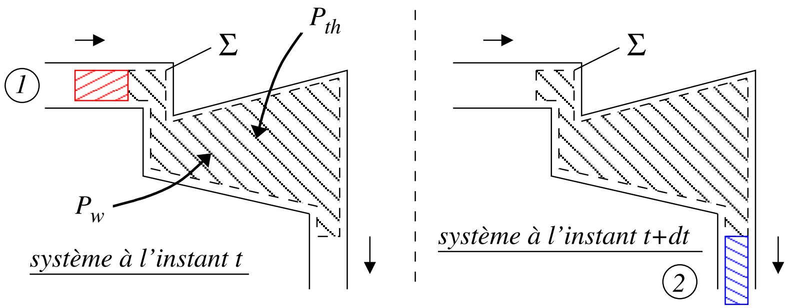
On considère un fluide en écoulement stationnaire.

→ À l'entrée du dispositif, le fluide est caractérisé par les grandeurs P_1 (pression), T_1 (température) et D_m^1 (débit massique), à la sortie par les grandeurs P_2, T_2, D_m^2.

→ La partie centrale du dispositif peut modéliser toute sorte de dispositif physique (un échangeur thermique, une turbine, un compresseur, les pales d'une éolienne,...)

Expression du bilan

Le système S est constitué, à l'instant t, par le fluide contenu à l'intérieur de la surface de contrôle Σ et le fluide qui s'apprête à entrer dans le dispositif pendant dt.



Pour ce système fermé, on applique le premier principe de la thermodynamique entre les instants t et $t + dt$:

$$d(U + E_c + E_p) = \delta W^{ext} + \delta Q^{ext}$$

→ Le régime étant stationnaire, les énergies interne, cinétique et potentielle du fluide contenu dans Σ ne varient pas au cours du temps, la variation s'identifie à la différence des grandeurs en sortie (2) et en entrée (1) :

$$d(U + E_c + E_p) = (\delta U_2 + \delta E_{c,2} + \delta E_{p,2}) - (\delta U_1 + \delta E_{c,1} + \delta E_{p,1})$$

Le régime étant stationnaire, les débits massiques sont nécessairement égaux, pendant dt la masse qui sort est égale à la masse qui entre : $\delta m_2 = \delta m_1 = \delta m$.

On exprime alors la relation précédente à l'aide des grandeurs massiques :

$$d(U + E_c + E_p) = \delta m\left[(u_2 + e_{c,2} + e_{p,2}) - (u_1 + e_{c,1} + e_{p,1})\right]$$

→ Il faut maintenant exprimer les transferts énergétiques reçus pendant dt :

⋆ δQ_{ext} le transfert thermique reçu par le système situé à l'intérieur de la surface de contrôle (combustion, résistance chauffante, échangeur,...) pendant dt ;

⋆ $\delta W^{ext} = \delta W^p + \delta W_u$, avec δW_u le travail mécanique utile reçu par le système à l'intérieur de la surface de contrôle (compresseur, pales d'une éolienne,...) pendant dt et δW^p le travail des forces de pression à la frontière.

Le travail sur la surface latérale étant nul, il suffit d'évaluer les travaux en amont et en aval :

$$\delta W^p = P_1 S_1 v_1 dt - P_2 S_2 v_2 dt = \frac{P_1}{\mu_1} \times S_1 \mu_1 v_1 dt - \frac{P_2}{\mu_2} \times S_2 \mu_2 v_2 dt = \delta m\left(\frac{P_1}{\mu_1} - \frac{P_2}{\mu_2}\right)$$

On en déduit finalement :

$$\delta m\left[(u_2 + e_{c,2} + e_{p,2}) - (u_1 + e_{c,1} + e_{p,1})\right] = \delta m\left(\frac{P_1}{\mu_1} - \frac{P_2}{\mu_2}\right) + \delta W_u + \delta Q^{ext}$$

$$\delta m\left[\left(u_2 + \frac{P_2}{\mu_2} + e_{c,2} + e_{p,2}\right) - \left(u_1 + \frac{P_1}{\mu_1} + e_{c,1} + e_{p,1}\right)\right] = \delta W_u + \delta Q^{ext}$$

Avec $u + \dfrac{P}{\mu} = h$ l'enthalpie massique et $w_u = \dfrac{\delta W_u}{\delta m}$, $q = \dfrac{\delta Q^{ext}}{\delta m}$, le travail utile et le transfert thermique par unité de masse, on en déduit :

$$\Delta h + \Delta e_c + \Delta e_p = w_u + q$$

Énoncé du premier principe pour un écoulement stationnaire

Pour un fluide en écoulement stationnaire, le premier principe prend la forme du premier principe industriel :

$$\boxed{\Delta h + \Delta e_c + \Delta e_p = w_u + q}$$

avec w_u le travail utile massique et q le transfert thermique massique, Δ représentant la variation de la grandeur massique entre l'entrée et la sortie du dispositif.

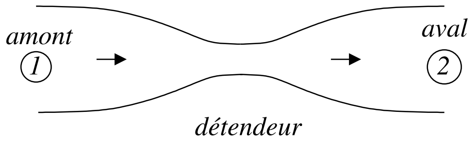
Remarque : le débit massique permet aisément de passer d'une énergie massique à une puissance, ainsi :

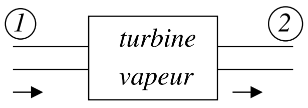
$$w_u \times D_m = \frac{\delta W_u}{\delta m} \times \frac{\delta m}{dt} = \frac{\delta W_u}{dt} = P_u$$

$$\boxed{D_m \times \left[\Delta\left(h + e_c + e_p\right)\right] = P_u + P_{th}}$$

Applications

→ ***Détendeur (détente de Joule-Thomson)*** :
Dans les machines réfrigérantes, le fluide passe au sein d'un détendeur avant de passer au contact de la source froide.





Au sein du détendeur, le fluide ne reçoit ni transfert thermique ni travail mécanique utile. Pour une machine réfrigérante, il semble raisonnable de ne pas tenir compte des variations d'énergie cinétique et potentielle, on en déduit :

$$\Delta h = 0 \quad \Rightarrow \quad h_1 = h_2$$

La conservation de l'enthalpie massique permet de déterminer l'état du fluide (composition, pression et température) à la sortie du détendeur avant l'entrée dans l'échangeur.

→ ***Détente dans une turbine à vapeur*** :
⋆ Au sein d'une turbine à vapeur, la phase motrice est associée à la détente de la vapeur au contact de la turbine. En se détendant, la vapeur sous haute pression fournit à la turbine de l'énergie mécanique.

⋆ La turbine fonctionne dans les conditions suivantes :

	amont	aval
Pression	$P_1 = 6 \times 10^6$ Pa	$P_2 = 9,5 \times 10^4$ Pa
enthalpie massique	$h_1 = 3,28$ MJ/kg	$h_2 = 2,67$ MJ/kg
vitesse	$v_1 = 160$ m/s	$v_2 = 80$ m/s
Débit massique	$D_{m,1} = 20$ kg/s	$D_{m,2} = 20$ kg/s

En négligeant le transfert thermique, le premier principe conduit à :

$$P_u = D_m \times w_u = D_m\left(\Delta h + \Delta e_c\right) = D_m\left(h_2 - h_1 + \frac{1}{2}v_2^2 - \frac{1}{2}v_1^2\right) = -12,4 \text{ MW}$$

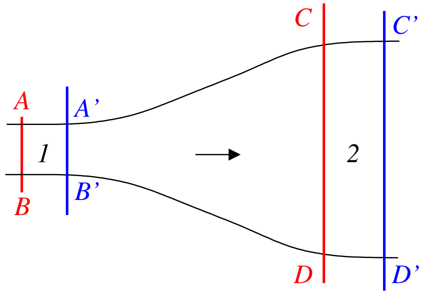
La puissance mécanique utile reçue est bien évidemment négative, la vapeur (le système étudié) cède de l'énergie à la turbine.

Notons enfin que $\left|\dfrac{v_2^2 - v_1^2}{2(h_2 - h_1)}\right| \simeq 1,6\%$, la variation d'énergie cinétique est négligeable devant la variation d'enthalpie. Il s'agit bien d'un problème de nature thermodynamique.

2.2 Deuxième principe pour un écoulement stationnaire

Principe de l'étude

On considère l'écoulement stationnaire d'un fluide au sein d'une tuyère. Le système "Sys" est constitué du fluide contenu dans $ABCD$ à l'instant t.



Expression du bilan

⋆ Le deuxième principe de la thermodynamique appliqué au système "Sys" entre t et $t + dt$ s'écrit :

$$dS = \delta S_e + \delta S_c \quad \text{avec} \quad \delta S_c \geq 0$$

⋆ Le régime étant stationnaire, la variation d'entropie vaut :

$$dS = \delta S_{CC'DD'} - \delta S_{ABA'B'} = \delta S_2 - \delta S_1 = \delta m\left(s_2 - s_1\right)$$

avec s_1 et s_2 les entropies massiques en amont et en aval.

Et donc pour **le bilan d'entropie écrit pour les grandeurs massiques** :

$$\boxed{\Delta s = (s_2 - s_1) = s_e + s_c}$$

Exemple de la détente de Joule-Thomson d'un gaz parfait

⋆ Les parois étant calorifugées, $\delta Q = 0$ et $s_e = 0$.

⋆ Pour un gaz parfait $\Delta s = c_p \ln\left(\dfrac{T_2}{T_1}\right) - \dfrac{R}{M}\ln\left(\dfrac{P_2}{P_1}\right)$.

⋆ Pour un gaz parfait, $h_2 = h_1$ entraîne $T_2 = T_1$ et finalement :

$$s_c = \Delta s = \frac{R}{M}\ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right)$$

2.3 Modèle de l'écoulement parfait et relation de Bernoulli

Conditions d'étude

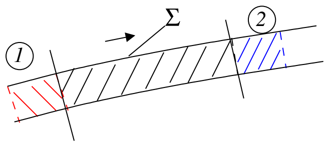
L'écoulement est supposé **parfait**, stationnaire, incompressible et homogène.
→ Le caractère parfait de l'écoulement signifie que l'on néglige toutes les causes d'irréversibilité et de dissipation associées aux transferts diffusifs : absence d'échanges thermiques, fluide non visqueux.

→ En pratique, cela revient à se placer **en dehors de la couche limite**. Ceci est d'autant plus facile à réaliser que le **nombre de Reynolds est élevé**, ce qui est le cas pour les écoulements industriels.

→ On suppose enfin le référentiel galiléen, un axe vertical orienté vers le haut et l'absence d'apport mécanique extérieur ($w_u = 0$).

Relation de Bernoulli

On considère une ligne de courant.



Avec les hypothèses mentionnées ci-dessus, le premier principe s'écrit :

$$(h_2 - h_1) + \left(\frac{1}{2}v_2^2 - \frac{1}{2}v_1^2\right) + (gz_2 - gz_1) = 0$$

Très généralement l'enthalpie massique s'écrit $h = u + \frac{P}{\mu}$. Pour un fluide incompressible et en l'absence d'effets thermiques, l'énergie interne sera la même en amont et en aval, c'est à dire :

$$h_2 - h_1 = \left(u_2 + \frac{P_2}{\mu_2} - u_1 - \frac{P_1}{\mu_1}\right) = \frac{P_2}{\mu} - \frac{P_1}{\mu}$$

On obtient finalement :

$$\frac{1}{2}v_2^2 + gz_2 + \frac{P_2}{\mu} = \frac{1}{2}v_1^2 + gz_1 + \frac{P_1}{\mu}$$

Relation de Bernoulli : dans un référentiel galiléen, avec un axe vertical orienté vers le haut, pour un écoulement parfait, stationnaire, incompressible et homogène, **le long d'une ligne de courant** :

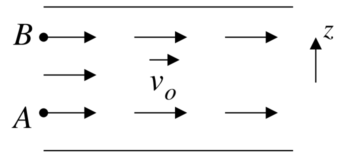
la grandeur $\frac{1}{2}v^2 + gz + \frac{P}{\mu}$ se conserve

Remarques :
⋆ en l'absence d'écoulement, on retrouve la loi de la statique pour un fluide incompressible : $P_1 + \mu g z_1 = P_2 + \mu g z_2$
⋆ La relation de Bernoulli traduit l'absence de dissipation mécanique au sein de l'écoulement.

Complément

Au sein d'un écoulement parfait uniforme et stationnaire, la relation de la statique des fluides s'applique :

$$P_A + \mu g z_A = P_B + \mu g z_B$$

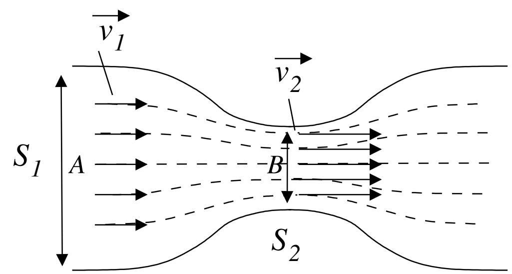


Justification : le fluide se déplaçant en bloc à la vitesse $\vec{v}_0$, l'idée est de se placer dans le référentiel du fluide dans lequel le fluide est au repos, on peut alors appliquer la loi de la statique des fluides.

Effet Venturi et applications

→ ***Principe de l'effet Venturi*** :

On considère un écoulement parfait, stationnaire, homogène et incompressible dans une canalisation horizontale de section variable. On suppose de plus que le champ des vitesses est uniforme sur les portions cylindriques.



⋆ Pour cet écoulement homogène et incompressible, le vecteur vitesse est à flux conservatif : $S_1 v_1 = S_2 v_2$.

⋆ La relation de Bernoulli le long de AB s'écrit : $\frac{P_1}{\mu} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{P_2}{\mu} + \frac{v_2^2}{2}$

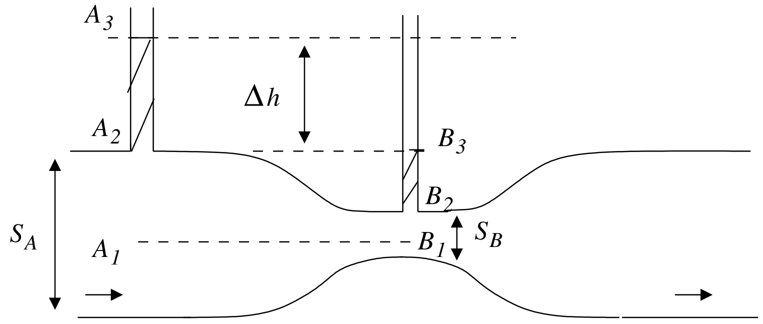
Comme $S_2 < S_1$, on a $v_2 > v_1$ et donc $P_2 < P_1$.

Les régions de faible section, donc de grande vitesse, sont des régions de basse pression.

$\rightarrow$ ***Applications*** :

$\star$ *Débitmètre à effet Venturi* :

La dépression créée par l'effet Venturi dépend de la vitesse de l'écoulement, certains débitmètres exploitent cette propriété.
On supposera que la vitesse est uniforme sur les sections cylindriques.



$\rightarrow$ L'application de la relation de Bernoulli sur la ligne de courant entre A_1 et B_1 conduit à :

$$P_{A_1} - P_{B_1} = \frac{1}{2}\mu\left(v_{B_1}^2 - v_{A_1}^2\right) = \frac{1}{2}\mu v_{A_1}^2\left[\left(\frac{v_{B_1}}{v_{A_1}}\right)^2 - 1\right]$$

$\rightarrow$ la conservation du débit volumique $D_v = S_A v_{A_1} = S_B v_{B_1}$ conduit à :

$$P_{A_1} - P_{B_1} = \frac{1}{2}\mu\frac{D_v^2}{S_A^2}\left[\left(\frac{S_A}{S_B}\right)^2 - 1\right]$$

$\rightarrow$ Enfin la loi de l'hydrostatique assure que :

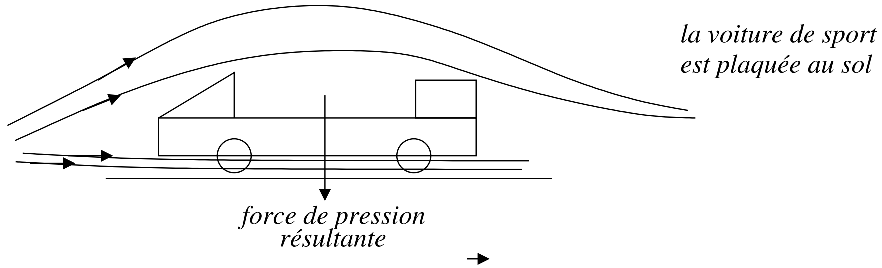
$$P_{A_1} = P_0 + \mu g(z_{A_3} - z_{A_1}) \quad \text{et} \quad P_{B_1} = P_0 + \mu g(z_{B_3} - z_{B_1})$$

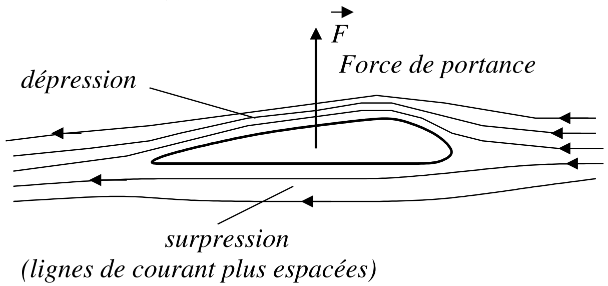
c'est à dire : $P_{A_1} - P_{B_1} = \mu g \Delta h$

$$g\Delta h = \frac{1}{2}\frac{D_v^2}{S_A^2}\left[\left(\frac{S_A}{S_B}\right)^2 - 1\right]$$

La mesure de Δh et les caractéristiques du tube donnent accès au débit volumique.

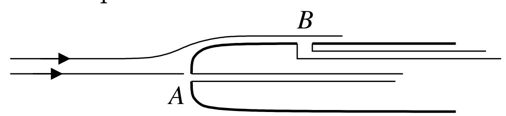
$\star$ *Effet de sol et portance* : à chaque fois, on se place dans le référentiel du mobile (voiture, aile d'avion) dans lequel l'écoulement est stationnaire.





$\star$ *Mesure de vitesse (tube de Pitot statique)* :

Un tube de Pitot statique permet de déterminer la vitesse d'un écoulement *via* une mesure différentielle de pression.



On appelle P_∞ et v_∞ la pression et la vitesse loin de l'instrument de mesure. On applique alors la relation de Bernoulli sur deux lignes de courant :

$\star$ $\dfrac{P_\infty}{\mu} + \dfrac{v_\infty^2}{2} = \dfrac{P_A}{\mu} + 0$, A est un point d'arrêt.

$\star$ $\dfrac{P_\infty}{\mu} + \dfrac{v_\infty^2}{2} = \dfrac{P_B}{\mu} + \dfrac{v_B^2}{2}$.

De la comparaison des deux expressions, on déduit : $v_B^2 = 2\left(P_A - P_B\right)/\mu$.

2.4 Pertes de charge dans une conduite

Pression totale au sein de l'écoulement

Dans le cas d'un écoulement parfait, stationnaire, homogène et incompressible, la relation de Bernoulli indique qu'une grandeur homogène à une pression se conserve le long d'une ligne de courant :

$$\underbrace{P + \mu g z}_{\text{terme statique}} + \underbrace{\mu \frac{v^2}{2}}_{\text{correction dynamique}} = \underbrace{P_{tot}}_{\text{pression totale}}$$

Cette pression totale représente l'énergie mécanique volumique associée à l'écoulement.

En cas de dissipation, cette grandeur ne se conserve plus, et on peut écrire :

$$P_1 + \mu g z_1 + \mu \frac{v_1^2}{2} = P_2 + \mu g z_2 + \mu \frac{v_2^2}{2} + \underbrace{\Delta P_{tot}}_{>0}$$

ΔP_{tot} représente **la perte de charge** (en toute rigueur, la charge, homogène à une hauteur, est $P_{tot}/(\mu g)$).

Exemples de perte de charge

→ Perte de charge régulière : (Cf. Transport 04. Fluides en écoulement)

Dans le cas d'un écoulement à faible nombre de Reynolds, on a établi la loi de Hagen-Poiseuille qui montre une perte de charge proportionnelle à la longueur de la canalisation.

Très généralement, on définit le coefficient de perte de charge régulière :

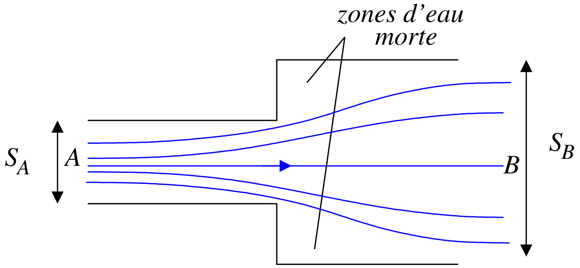
$$\boxed{\Lambda = \frac{\Delta P_{tot}}{1/2 \mu U^2} \times \frac{D}{L}}$$

avec L la longueur de la canalisation, D son diamètre et U la vitesse débitante.

Ce coefficient dépend du nombre de Reynolds et de la rugosité de la paroi de la canalisation.

→ Perte de charge singulière :

Des pertes de charge peuvent se produire du fait de l'irrégularité des conduites (coudes, évasements, étranglements).



En l'absence de dénivellation, la perte de charge singulière est définie par :

$$P_A + \mu \frac{v_A^2}{2} = P_B + \mu \frac{v_B^2}{2} + \Delta P_{tot}$$

À l'aide d'un bilan de quantité de mouvement, on montre (Cf. TD), dans le cas d'un évasement, que :

$$\Delta P_{tot} = \frac{1}{2} \mu v_A^2 \left(1 - \frac{S_A}{S_B}\right)^2$$

Très généralement, on définit un coefficient de perte de charge singulière :

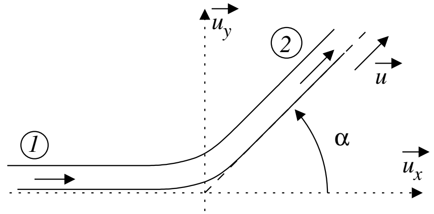
$$\Lambda = \frac{\Delta P_{tot}}{1/2 \mu U^2}$$

3 Bilans dynamiques

3.1 Bilan de quantité de mouvement

Principe de l'étude

On considère l'écoulement d'un fluide incompressible dans une canalisation coudée horizontale de section constante.



On cherche à déterminer l'action de la canalisation sur l'écoulement.

Calcul de la force résultante

⋆ Pour un écoulement incompressible, le vecteur vitesse est à flux conservatif :

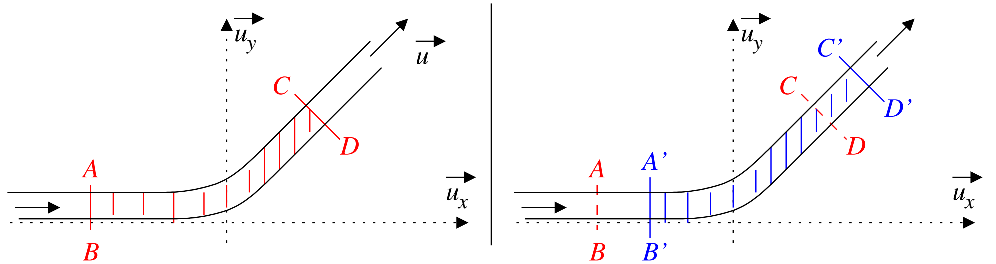
$$v_1 S_1 = v_2 S_2 \quad \text{donc} \quad \underline{v_1 = v_2 = v}$$

Pour déterminer le flux, on a considéré que la vitesse était uniforme sur une section droite (écoulement unidimensionnel), la section étant la même en tout point de la canalisation, on en a déduit l'égalité de la vitesse en amont et en aval.

⋆ Pour l'écoulement stationnaire d'un fluide parfait incompressible, la relation de Bernoulli appliquée à une ligne de courant conduit à :

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{P_1}{\mu} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{P_2}{\mu} \quad \text{donc} \quad \underline{P_1 = P_2 = P}$$

⋆ $\mathcal{S}$ désigne le système fermé de fluide représenté sur le schéma. On s'intéresse à son évolution entre t et $t+dt$:



système S à l'instant t *système S à l'instant t+dt*

Pour ce système fermé, le théorème de la résultante cinétique dans le référentiel de la canalisation assure que :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{tot} \quad \text{donc} \quad \boxed{d\vec{p} = \vec{F}_{tot}dt}$$

→ L'écoulement étant stationnaire, la variation de la quantité de mouvement se résume aux quantités qui entrent et sortent pendant dt :

$$d\vec{p} = \delta m_2\vec{v}_2 - \delta m_1\vec{v}_1 = \delta m\,(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \mu S v^2 dt\,(\vec{u} - \vec{u}_x)$$

$$\underline{d\vec{p} = \mu S v^2 dt\,([\cos\alpha - 1]\,\vec{u}_x + \sin\alpha\vec{u}_y)}$$

En régime stationnaire, la même quantité de matière doit entrer et sortir pendant dt, ce qui assure que : $\underline{\delta m_1 = \delta m_2 = \delta m = \mu S v dt}$.

→ Dans le plan horizontal, les forces s'exerçant sur le système $\mathcal{S}$ se résument aux actions de pression en amont et en aval et à la force de la conduite sur le fluide contenu dans $\mathcal{S}$:

$$\underline{\vec{F}_{tot} = p_1S_1\vec{u}_x - p_2S_2\vec{u} + \vec{F}_{c\to f} = pS\,([1-\cos\alpha]\,\vec{u}_x - \sin\alpha\vec{u}_y) + \vec{F}_{c\to f}}$$

→ La mise en commun des relations obtenues conduit à :

$$\boxed{\vec{F}_{c\to f} = \left(\mu v^2 + p\right) S\,([\cos\alpha - 1]\,\vec{u}_x + \sin\alpha\vec{u}_y) = -\vec{F}_{f\to c}}$$

Analyse des résultats

⋆ Les caractéristiques du fluide en amont et en aval de l'écoulement sont suffisantes pour déterminer l'action du fluide sur la canalisation. Nous n'avons pas eu besoin de savoir ce qui se passe exactement au niveau du coude.

⋆ Cas limites :
→ Pour $\alpha = 0$, $\vec{F}_{c\to f} = \vec{0}$, la canalisation rectiligne n'agit pas sur l'écoulement et réciproquement.

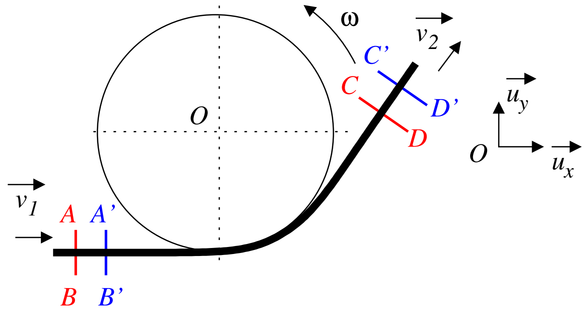
→ Pour $\alpha = \pi/2$, $\vec{F}_{c\to f} = \left(\mu v^2 + p\right) S\,(-\vec{u}_x + \vec{u}_y)$, l'action est dirigée selon la seconde bissectrice.

→ Pour α quelconque, le force est dirigée selon la bissectrice du coude.

3.2 Bilans de moment cinétique et d'énergie cinétique

Principe de l'étude

On s'intéresse au mouvement d'une turbine entraînée par un jet d'eau.



⋆ La turbine, modélisée par un disque de rayon a et de moment d'inertie J, tourne autour de l'axe Δ à la vitesse angulaire ω constante.

⋆ La turbine, entraînée par le jet d'eau, est soumise à un couple résistant Γ qui modélise la machine à laquelle la turbine est couplée.

⋆ On note D_m le débit massique du jet d'eau, $\vec{v}_1$ la vitesse à l'entrée (ces deux grandeurs sont connues) et $\vec{v}_2$ la vitesse en sortie.

⋆ L'action de la pesanteur est négligée, on se place en régime stationnaire.

Bilan de moment cinétique

Le système $(\mathcal{S})$ est constitué de la turbine $(\mathcal{S}_1)$ et de l'eau $(\mathcal{S}_2)$ située à l'instant t dans le domaine $ABCD$.

On applique le théorème du moment cinétique au point O pour le système $(\mathcal{S})$ entre les instants t et $t+dt$:

$$\frac{d\vec{L}_o^{\mathcal{S}}}{dt} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_o^{ext} \quad \text{donc} \quad d\vec{L}_o^{\mathcal{S}} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_o^{ext}dt$$

⋆ Pour la turbine : $d\vec{L}_o^{\mathcal{S}_1} = [J\times\omega(t+dt) - J\times\omega(t)]\,\vec{u}_z = \vec{0}$

⋆ Pour l'eau : $d\vec{L}_o^{\mathcal{S}_2} = \delta\vec{L}_o^{CDC'D'} - \delta\vec{L}_o^{ABA'B'} = (D_m dt\times av_2 - D_m dt\times av_1)\,\vec{u}_z$

⋆ Le moment des forces se décompose en deux termes : le couple exercé par la machine sur la turbine et le moment des forces de pression ; la pression étant uniforme, égale à p_0 sur l'ensemble du contour du système $\mathcal{S}$, le moment des forces de pression est nulle :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_o}^{pres.} = \oiint \overrightarrow{OM} \wedge -p_o d\vec{S} = -p_o \oiint \overrightarrow{OM} \wedge d\vec{S} = \vec{0}$$

On en déduit finalement :

$$(D_m dt \times av_2 - D_m dt \times av_1) = -\Gamma \mathbf{dt} \quad \text{donc} \quad \boxed{\Gamma = D_m a(v_1 - v_2)}$$

Nous allons essayer de compléter l'étude à l'aide d'un bilan énergétique.

Bilan d'énergie cinétique

On applique le théorème de la puissance cinétique au système $\mathcal{S}$ entre t et $t + dt$:

$$\frac{dE_c^{\mathcal{S}}}{dt} = P^{ext} + P^{int} \quad \text{donc} \quad dE_c^{\mathcal{S}} = E_c^{\mathcal{S}}(t+dt) - E_c^{\mathcal{S}}(t) = \left(P^{ext} + P^{int}\right) dt$$

⋆ Pour la turbine : $dE_c^{\mathcal{S}_1} = d\left(\frac{1}{2}J\omega^2\right) = 0$

⋆ Pour l'eau : $dE_c^{\mathcal{S}_2} = \delta E_c^{CDC'D'} - \delta E_c^{ABA'B'} = \frac{1}{2}D_m dt\left(v_2^2 - v_1^2\right)$

⋆ Calcul des puissances :

→ En négligeant les phénomènes dissipatifs : $P_{int} = 0$

→ La puissance extérieure se décompose en deux termes, la puissance du couple résistant $P = -\Gamma\omega$ et la puissance des forces de pression :

Sur la turbine et la portion latérale de l'écoulement, la force de pression est orthogonale à la vitesse, la puissance des forces de pression sur ces parties est donc nulle.

La puissance des forces de pression se limite aux actions en entrée et en sortie du jet :

$$\text{Puissance forces de pression} = p_0 S_1 v_1 - p_0 S_2 v_2 = p_0(S_1 v_1 - S_2 v_2) = 0$$

Pour un fluide incompressible et homogène le débit volumique se conserve, ce qui justifie le dernier résultat.

Ce qui donne finalement pour le bilan énergétique :

$$\frac{1}{2}D_m(v_2^2 - v_1^2) = -\Gamma\omega$$

En combinant avec la première équation, on en déduit :

$$\boxed{v_1 + v_2 = 2a\omega}$$

Vitesse angulaire de la turbine

On combine alors les deux équations pour éliminer v_2 et en déduire la vitesse angulaire ω :

$$\Gamma = 2D_m a\left(v_1 - a\omega\right) \quad \text{donc} \quad \boxed{\omega = \frac{v_1}{a}\left(1 - \frac{\Gamma}{2D_m a v_1}\right)}$$

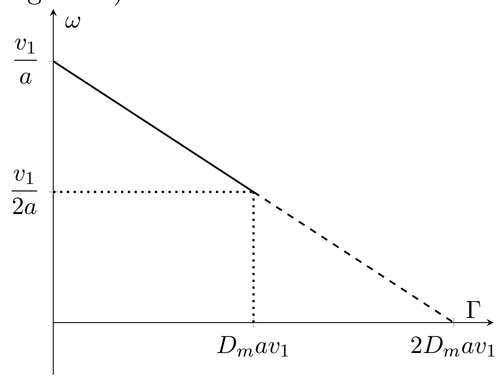
Analyse des résultats

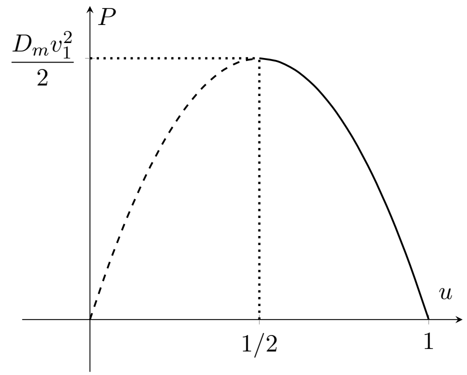
<u>Vitesse angulaire et couple résistant</u> :

→ En l'absence de couple résistant ($\Gamma = 0$), $v_1 = v_2 = \omega a$. En régime stationnaire, la vitesse angulaire est constante, le couple résistant étant nul, le couple moteur dû au jet d'eau l'est aussi. La vitesse du jet est égale à la vitesse de la périphérie de la turbine ; le jet d'eau et la turbine s'ignorent.

→ La vitesse en sortie s'annule pour $\Gamma = D_m a v_1$.

→ Traçons la vitesse angulaire de la turbine en fonction du couple résistant (figure de gauche) :





<u>Puissance fournie par la turbine</u> :

En régime stationnaire, la turbine exerce un couple $\vec{\Gamma} = +\Gamma\vec{u}_z$ sur la machine en lui fournissant une puissance :

$$P = \Gamma \times \omega = 2D_m a\omega(v_1 - a\omega)$$

$$P = D_m v_1^2 \times 2u(1-u) \quad \text{avec} \quad u = \frac{\omega a}{v_1}$$

→ Pour un couple nul, la puissance fournie est bien évidemment nulle, la turbine tourne à vide sans interagir avec le jet d'eau.

→ La puissance maximale, atteinte pour $v_2 = 0$ ($u = 1/2$), vaut :

$$P_{max} = \frac{1}{2} D_m v_1^2$$

Le jet perd la totalité de son énergie cinétique, la puissance transmise est alors maximale égale à la puissance cinétique du jet incident.

Capacités exigibles :

→ Définition d'un système fermé pour les bilans macroscopiques

À partir d'une surface de contrôle ouverte vis-à-vis des échanges, définir un système fermé approprié pour réaliser un bilan de grandeur extensive.

→ Bilans d'énergie

Exprimer les principes de la thermodynamique pour un écoulement stationnaire en vue de l'étude d'une machine thermique sous la forme :
$\Delta h + \Delta e_c + \Delta gz = w_u + q$; $\Delta s = s_e + s_c$
Utiliser le modèle de l'écoulement parfait pour un écoulement à haut Reynolds en dehors de la couche limite.
Énoncer et appliquer la relation de Bernoulli à un écoulement parfait, stationnaire, incompressible et homogène.
Décrire l'effet Venturi. Décrire les applications : tube de Pitot, débitmètre.
Relier qualitativement la perte de charge à une dissipation d'énergie mécanique.
Effectuer un bilan d'énergie sur une installation industrielle : pompe ou turbine.
Utiliser le fait admis que la puissance des actions intérieures est nulle pour un écoulement parfait et incompressible.

→ Bilans de quantité de mouvement et de moment cinétique

Faire l'inventaire des forces extérieures.
Effectuer un bilan de quantité de mouvement.
Effectuer un bilan de moment cinétique pour une turbine.