Éléments de statique des fluides

1 Le modèle du fluide continu

1.1 L'état fluide

→ **L'état fluide** est un état déformable ; il se déforme sous l'action d'une force aussi petite soit elle ; cette caractéristique le distingue de l'état solide.
→ **L'état fluide** regroupe les gaz et les liquides qui se différencient principalement par leur densité.
→ Les gaz sont des fluides peu denses ($\rho_{air} = 1,3$ kg.m^{-3}) et compressibles, ils occupent tout l'espace qui leur est offert.
→ Les liquides sont des fluides denses ($\rho_{eau} = 10^3$ kg.m^{-3}) et quasiment incompressibles, ils occupent un volume limité par une surface libre.

1.2 Approximation des milieux continus

Un fluide est un milieu suffisamment dense pour être découpé en volumes élémentaires $d\tau$, volumes petits à l'échelle macroscopique (dimensions faibles vis à vis de la taille totale du système) mais grands à l'échelle microscopique (dimensions grandes vis à vis de la distance entre particules) pour contenir un nombre très important de particules et permettre de définir des grandeurs moyennées.
Ainsi en chaque point M du système, on pourra définir les grandeurs comme $P(M)$, $T(M)$, $\rho(M)$, valeurs constantes à l'échelle du volume $d\tau$ mais susceptibles de varier d'un point à un autre.
Notons que, même un pour gaz parfait dans les conditions standards, un volume $d\tau = 1$ mm^3 contient de l'ordre de $2,4 \times 10^{16}$ particules.

1.3 Champ de forces dans un fluide au repos

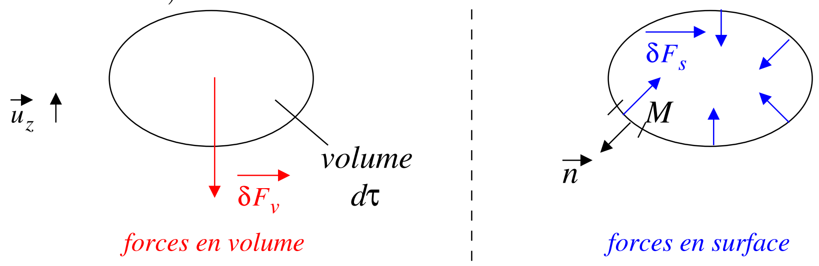
Le système contenu à l'intérieur du volume $d\tau$ est soumis à deux types de forces :

— **une résultante de force $\delta\vec{F}_v$ proportionnelle au volume** $d\tau$ due aux interactions à distance.

L'élément de volume $d\tau$ contient une masse de fluide $\delta m = \rho(M)d\tau$ avec $\rho(M)$ la masse volumique au point M ; cet élément de fluide est donc soumis à une résultante de force égale à son poids :

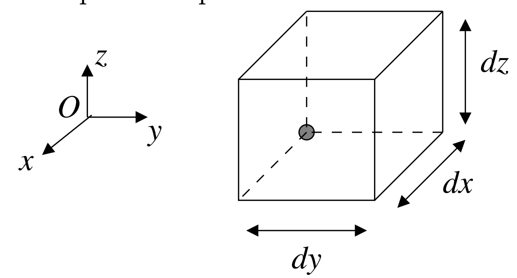
$$\delta\vec{F}_v = \delta m \times \vec{g} = -\rho(M)d\tau g\vec{u}_z = -\rho(M)dxdydzg\vec{u}_z$$

— **des forces en surface** $\delta\vec{F}_s = -P(M)dS\vec{n}$ s'exerçant sur chaque élément dS de la surface et caractérisant des actions à courte portée (chocs, attraction entre molécules).



Équivalent volumique des forces de pression

Considérons les forces de pression qui s'exercent sur un élément de volume $d\tau$.



→ Sur la paroi inférieure d'aire $dS = dxdy$, située à l'altitude z, le milieu extérieur exerce sur l'élément de fluide une résultante de force :

$$\delta\vec{F}_s^{inf} = P(x,y,z)dxdy\vec{u}_z$$

→ Sur la paroi supérieure d'aire $dS = dxdy$, située à l'altitude $z+dz$, le milieu extérieur exerce sur l'élément de fluide une résultante de force :

$$\delta\vec{F}_s^{sup} = -P(x,y,z+dz)dxdy\vec{u}_z$$

La composante selon (Oz) de la résultante des forces de pression exercée sur l'élément de volume $d\tau$ s'écrit :

$$\delta F_z = [P(x,y,z) - P(x,y,z+dz)]\,dxdy \simeq -\frac{\partial P}{\partial z}dxdydz = -\frac{\partial P}{\partial z}d\tau$$

En généralisant le raisonnement sur les trois directions, on en déduit que les forces surfaciques de pression s'exerçant sur le système de volume $d\tau$ sont équivalentes à une force en volume :

$$\delta\vec{F} = \left(-\frac{\partial P}{\partial x}\vec{u}_x - \frac{\partial P}{\partial y}\vec{u}_y - \frac{\partial P}{\partial z}\vec{u}_z\right)d\tau \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{f}_v = \frac{\delta\vec{F}}{d\tau} = -\overrightarrow{\text{grad}}P}$$

Dans la formule précédente, on a introduit l'opérateur **gradient** qui agit sur un champ scalaire et renvoie un champ de vecteurs :

$$\boxed{\overrightarrow{\text{grad}}\ V = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{u}_z}$$

2 Équation de la statique des fluides dans le champ de pesanteur

Problème étudié :

On s'intéresse à l'équilibre mécanique d'un élément de fluide au repos placé dans le champ de pesanteur terrestre. On considère pour cela un petit cube de volume $d\tau = dxdydz$ situé autour d'un point $M(x, y, z)$ avec Oz l'axe vertical ascendant.

Équilibre mécanique :

L'élément de fluide est soumis à son poids et aux forces de pression. L'équilibre mécanique impose :

$$\vec{0} = -\rho d\tau \times g\vec{u}_z - \overrightarrow{\text{grad}}P d\tau \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\vec{0} = -\rho g\vec{u}_z - \overrightarrow{\text{grad}}P}$$

La projection de cette équation sur les trois directions de l'espace conduit à :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g$$

Avec la seule force de pesanteur en volume, le champ de pesanteur ne dépend que de la coordonnée z.

L'équilibre mécanique d'un fluide au repos dans le champ de pesanteur terrestre est régi par l'équation de la statique des fluides :

$$\frac{dP(z)}{dz} = -\rho g \quad \text{avec } Oz \text{ vertical ascendant.}$$

3 Application aux fluides compressibles

3.1 Modèle de l'atmosphère isotherme

Cadre de l'étude et hypothèses :

— on souhaite, à l'aide d'un modèle, décrire certaines caractéristiques de la troposphère, première « couche » de l'atmosphère terrestre ;

— on fait l'hypothèse d'un **équilibre thermodynamique local** : autour de chaque point M, on considère un élément de volume $d\tau$ à l'équilibre thermodynamique pour lequel on peut définir la pression $P(M)$, la température $T(M)$, la masse volumique $\rho(M)$;

— on assimile l'air à un gaz parfait composé de 80% de N_2 et 20% de O_2 de masse molaire $M = 29$ g.mol^{-1}. L'équilibre thermodynamique local permet d'écrire la relation des gaz parfaits pour l'élément $d\tau$:

$$P d\tau = \delta n RT \quad \Leftrightarrow \quad P = \frac{\delta n}{d\tau}RT = \frac{\delta m}{d\tau}\frac{RT}{M} = \frac{\rho RT}{M}$$

— on fait l'hypothèse d'un champ de pesanteur uniforme $g(z) = g_0 = cste$; sachant que $g(z) = g_0 \frac{R_T^2}{(R_T + z)^2}$, cette hypothèse est tout à fait réaliste tant que l'on se limite à des altitudes $z \simeq 10$ km $\ll R_T = 6400$ km le rayon terrestre.

— on suppose une atmosphère à l'équilibre thermique, c'est à dire $T = T_0 = cste$ (cette hypothèse est la plus contraignante, en moyenne la température diminue de $0,6$°C tous les 100 mètres dans la troposphère).

Détermination du champ de pression :

$$\begin{cases} \dfrac{dP(z)}{dz} = -\rho(z)g & \text{équilibre mécanique} \\ P(z) = \dfrac{\rho(z)RT(z)}{M} & \text{équation d'état du fluide} \\ T(z) = T_0 & \text{équilibre thermique} \end{cases}$$

On élimine alors la masse volumique pour obtenir une équation différentielle portant sur la pression :

$$\frac{Mg}{RT_0}p(z) = -\frac{dp}{dz} \quad \text{donc} \quad \boxed{P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{Mgz}{RT_0}\right) = P_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right)}$$

— on constate que, dans le cadre de ce modèle, la pression diminue exponentiellement avec l'altitude (raréfaction de l'atmosphère) avec $H = \frac{RT_0}{Mg} = 8,8$ km (pour $T = 300$ K), appelée hauteur caractéristique ; la troposphère a, dans ce modèle, une épaisseur de quelques dizaines de kilomètres ;

— à l'échelle d'une pièce, d'un bâtiment $h \simeq 10$ m $\ll H$, la pression peut donc être considérée comme constante égale à P_0 ; on peut donc parler de pression du gaz sans préciser le point.

3.2 Facteur de Boltzmann

Exemple de l'atmosphère isotherme :

À température fixée, la pression P et la densité particulaire n^* sont proportionnelles $P = n^* k_B T$, la loi d'évolution de P est donc également celle de n^* :

$$n^*(z) = n_0^* \exp\left(-\frac{Mgz}{RT_0}\right) = n_0^* \exp\left(-\frac{mgz}{k_B T}\right) \quad \text{avec} \quad R = \mathcal{N}_a k_B$$

avec m la masse d'une particule.

La probabilité pour qu'une particule se trouve à l'altitude z dans l'état d'énergie $E_p = mgz$ à la température T_0 est proportionnelle au facteur de Boltzmann $\exp\left(-\dfrac{mgz}{k_B T_0}\right)$.

- les niveaux de basse énergie sont toujours les plus peuplés ;
- on assiste à une compétition entre l'énergie potentielle E_p nécessaire pour occuper un niveau d'altitude z et l'énergie cinétique disponible par particule de l'ordre de $k_B T_0$;
- soit z_m l'altitude maximale : si $mgz_m \ll k_B T_0$ tous les niveaux seront équitablement peuplés, si $mgz_m \gg k_B T_0$ seuls les niveaux de plus basse énergie seront significativement occupés. Une augmentation de T_0 diminue la sélectivité.

Généralisation : loi de répartition de Boltzmann

Pour un système macroscopique, à l'équilibre thermique T_0, la probabilité de trouver une particule dans un état d'énergie $\mathcal{E}$ est proportionnelle à $\exp\left(-\dfrac{\mathcal{E}}{k_B T_0}\right)$, appelé facteur de Boltzmann.

4 Application aux fluides incompressibles

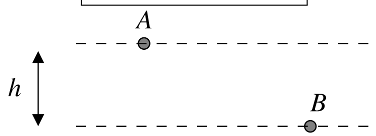
4.1 Loi de l'hydrostatique

Dans le cas d'un fluide incompressible et homogène (concrètement un liquide), $\rho = \rho_0$, il est alors immédiat d'obtenir le champ des pressions :

$$\frac{dP(z)}{dz} = -\rho_0 g \quad \Rightarrow \quad P(z) = P(z_0) + \rho_0 g (z_0 - z)$$

Plus simplement, on peut retenir la relation en faisant intervenir la différence de profondeur :

$$\boxed{P_B = P_A + \rho_0 g h}$$



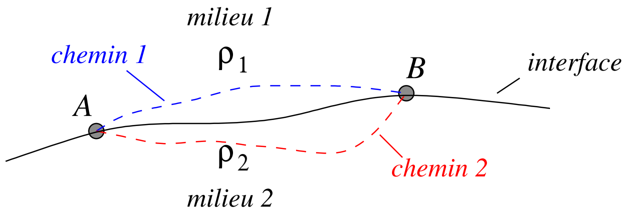
Dans ce modèle, la pression dans un liquide augmente proportionnellement à la profondeur ; ainsi, dans l'eau, si l'on s'enfonce de 10 mètres :

$$\Delta P = 10^3 \times 10 \times 10 = 10^5 \text{ Pa} = 1 \text{ bar}$$

Contrairement à un gaz, la pression dans un liquide varie significativement sur quelques mètres. Ceci s'explique par une masse volumique bien supérieure.

4.2 Conséquences et applications courantes

Surface d'équilibre entre deux fluides homogènes non miscibles :



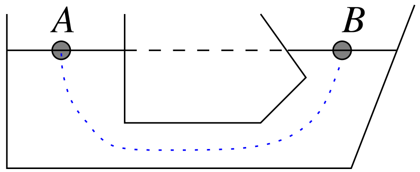
→ Dans le milieu 1 : $P_1(z_A) = P_1(z_B) + \rho_1 g (z_B - z_A)$
→ Dans le milieu 2 : $P_2(z_A) = P_2(z_B) + \rho_2 g (z_B - z_A)$

De l'égalité des pressions à la traversée de la surface, on déduit :

$$(\rho_2 - \rho_1)(z_B - z_A) = 0, \text{ comme } \rho_1 \neq \rho_2 \text{ alors } z_A = z_B$$

La surface d'équilibre entre deux fluides non miscibles est horizontale.

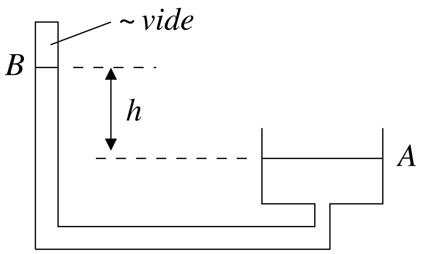
Principe des vases communicants :



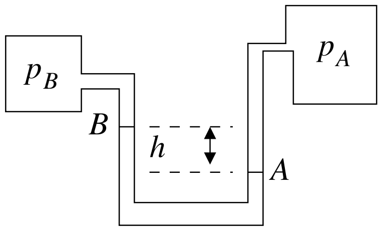
Lorsque des vases communiquent, les différentes surfaces libres du liquide au repos sont nécessairement situées à la même altitude.

Justification :
- dans le liquide $P(z_A) = P(z_B) + \rho g (z_B - z_A)$ (car on peut passer de A à B en restant dans le liquide) ;
- le milieu supérieur étant l'air $P(z_A) = P(z_B)$; la comparaison des deux relations impose $z_A = z_B$.

Baromètre et manomètre :



baromètre



manomètre

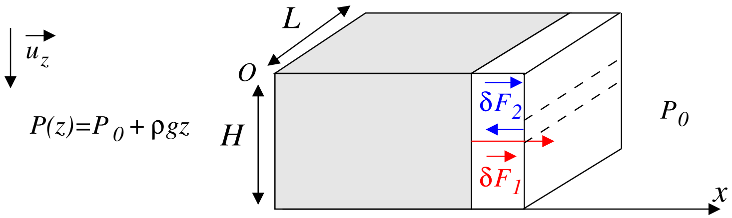
⋆ <u>Baromètre</u> : $P_A = P_B + \rho g h = \rho g h$; ⋆ <u>manomètre</u> : $P_A = P_B + \rho g h$

5 Forces exercées par un fluide au repos

5.1 Force de pression subie par une paroi

Barrage plan

Considérons une paroi (un barrage) servant à contenir un liquide comme indiqué sur le schéma ci-dessous :



δ

Attention que l'axe vertical est orienté vers le bas, la formule proposée assure que la pression augmente avec la profondeur z.

Sur une bande de paroi située à la profondeur z à dz près s'exerce la force élémentaire :

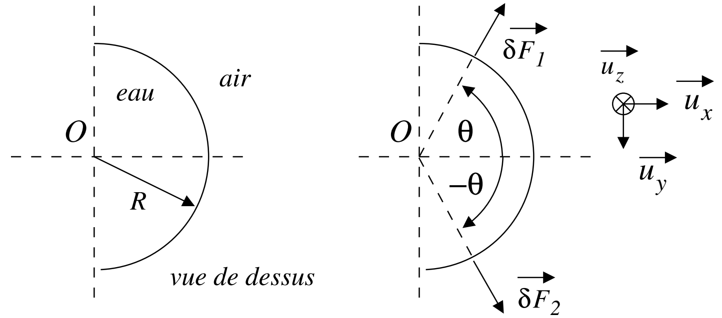
$$\delta\vec{F} = \delta\vec{F}_1 + \delta\vec{F}_2 = (P_0 + \rho g z)\, L dz \vec{u}_x - P_0 L dz \vec{u}_x \quad \Rightarrow \quad \delta\vec{F} = (\rho g z) L dz \vec{u}_x$$

En intégrant sur toute la hauteur :

$$\vec{F} = \int_0^H \delta\vec{F} = \int_0^H (\rho g z) L dz \vec{u}_x = \rho g L \frac{H^2}{2} \vec{u}_x$$

Barrage hémicylindrique

On considère un barrage hémicylindrique de hauteur h et de rayon R.



→ La pression dans l'eau (intérieur du barrage) varie selon $P(z) = P_0 + \rho g z$ avec z la profondeur et P_0 la pression atmosphérique ; la pression dans l'air (extérieur du barrage) est constante égale à P_0 ; le barrage ne ressent que la surpression $\Delta P(z) = P(z) - P_0 = \rho g z$.

→ Les forces élémentaires ne sont pas toutes dans la même direction, on ne peut pas additionner les normes. De part la symétrie du barrage, on constate que la composante selon (Oy) de la force infinitésimale créée au voisinage de θ est compensée par la composante selon (Oy) de la force infinitésimale créée au voisinage de $-\theta$; il suffit donc de ne sommer que les composantes selon l'axe (Ox) des forces de pression.

→ Considérons la force de pression s'exerçant à la profondeur z à dz près autour de l'angle θ à $d\theta$ près :

$$\delta\vec{F} = \Delta P(z) dS \vec{u}_r = \rho g z dz R d\theta \vec{u}_r$$

La composante de la force de pression selon (Ox) a pour expression :

$$\delta F_x = \delta\vec{F}.\vec{u}_x = \rho g z dz R \cos\theta d\theta$$

→ Il faut alors intégrer pour déterminer la force totale en ne considérant que la projection selon Ox :

$$F_x = \int_{z=0}^{h} \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \rho g z R dz \cos\theta d\theta$$

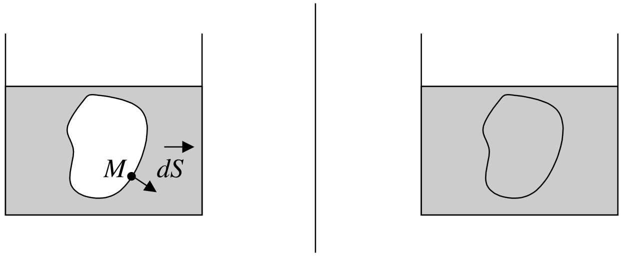
On peut alors considérer chaque intégrale indépendamment :

$$F_x = \int_{z=0}^{h} \rho g z dz \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} R\cos\theta d\theta \quad \Rightarrow \quad F_x = \rho g \frac{h^2}{2} \times 2R \quad \Rightarrow \quad F_x = \rho g h^2 R$$

5.2 Poussée d'Archimède

Soit un objet à l'équilibre dans un fluide ; la force exercée par le fluide sur l'objet, égale à la résultante des forces de pression, est appelée « Poussée d'Archimède » ; la pression étant plus forte dans le fond du récipient, la poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$ est dirigée vers le haut :

$$\vec{\Pi} = \oiint -P(M)\overrightarrow{dS}$$



Retirons l'objet et complétons par le liquide pour obtenir à nouveau le même champ de pression ; le fluide délimitant la même surface est lui-même à l'équilibre donc :

$$\vec{0} = \vec{P}_{fluide} + \oiint -P(M)\overrightarrow{dS} = \vec{P}_{fluide} + \vec{\Pi}$$

Les forces de pression exercées par un fluide au repos sur un corps placé en son sein ont une résultante appelée poussée d'Archimède égale à l'opposé du poids du « fluide déplacé » ; la poussée est appliquée au centre d'inertie C du « fluide déplacé » appelé centre de poussée.

Capacités exigibles

→ Forces surfaciques, forces volumiques.
Distinguer le statut des forces de pression et des forces de pesanteur.

→ Statique dans le champ de pesanteur uniforme : relation $dp/dz = -\rho g$.
Connaître des ordres de grandeur des champs de pression dans le cas de l'océan et de l'atmosphère. Exprimer l'évolution de la pression avec l'altitude dans le cas d'un fluide incompressible et homogène et dans le cas de l'atmosphère isotherme dans le modèle du gaz parfait.

→ Facteur de Boltzmann.
S'appuyer sur la loi d'évolution de la densité moléculaire de l'air dans le cas de l'atmosphère isotherme pour illustrer la signification du facteur de Boltzmann.
Approche documentaire : reconnaître un facteur de Boltzmann ; comparer k_BT aux écarts d'énergie dans un contexte plus général.

→ Résultante de forces de pression.
Exprimer une surface élémentaire dans un système de coordonnées adaptées. Utiliser les symétries pour déterminer la direction d'une résultante de forces de pression. Évaluer une résultante de forces de pression.

→ Poussée d'Archimède.
Expliquer l'origine de la poussée d'Archimède.
Exploiter la loi d'Archimède.

→ Équivalent volumique des forces de pression.
Exprimer l'équivalent volumique des forces de pression à l'aide d'un gradient.

→ Équation locale de la statique des fluides.
Établir l'équation locale de la statique des fluides.

Applications directes

AD 1. Iceberg et fonte de la glace

1. La masse volumique de la glace étant d'environ 920 kg/m^3 et celle de l'eau de mer de 1025 kg/m^3, justifier que la plus grande partie d'un iceberg est situé sous la surface de l'eau conformément à l'expression courante « la partie émergée de l'iceberg » pour désigner un phénomène qui est en fait bien plus vaste que ce que l'on perçoit.
2. Un verre contient de l'eau douce et un glaçon, le verre étant rempli à ras bord. Lors de la fonte du glaçon, le niveau d'eau va-t-il monter ou baisser ?

AD 2. Tube en U

Soit un tube en U contenant de l'eau (masse volumique $\rho_e = 1,0$ kg.L^{-1}). On verse dans un des bras du tube une hauteur h d'huile (masse volumique $\rho_h = 0,90$ kg.L^{-1}). Donner l'expression de la différence de hauteur Δh entre la surface libre de l'huile et la surface libre de l'eau.

AD 3. Décollage d'un ballon

Un ballon de volume V est rempli de dihydrogène ($M = 2,0$ g.mol^{-1}). Calculer le volume V nécessaire pour entraîner l'ascension d'une nacelle de masse $m = 100$ kg. On prendra ($M_{air} = 29$ g.mol^{-1}). On considérera les gaz parfaits à la pression moyenne de 1,0 bar et à la température $T = 293$ K.