

### Mouvements dans un champ de force centrale

## 1 Forces centrales conservatives

### 1.1 Définition

Soit  $O$  un point fixe et  $M$  un point matériel soumis à une force  $\vec{F}$ .  $\vec{F}$  est une force centrale si elle s'écrit sous la forme :

$$\vec{F} = F(r)\vec{u}_r \quad \text{avec} \quad \vec{u}_r = \frac{\vec{OM}}{OM} \quad \text{et} \quad r = OM$$

Remarque : dans toute la suite, nous nous intéresserons à des forces centrales dites **newtoniennes**, c'est à dire des forces centrales dont la norme varie en  $\frac{1}{r^2}$ .

### 1.2 Exemples

#### Interaction gravitationnelle

On considère un corps de masse  $M_0$  en  $O$  et un corps de masse  $m$  situé en  $M$  ; le corps en  $O$  exerce sur le corps en  $M$  une force attractive :

$$\vec{f}_g = -\frac{\mathcal{G}M_0m}{r^2}\vec{u}_r$$

avec  $\mathcal{G}$  la constante de gravitation universelle :  $\mathcal{G} = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2}$ .

#### Interaction électrostatique

On considère un corps de charge  $Q$  en  $O$  et un corps de charge  $q$  situé en  $M$  ; le corps en  $O$  exerce sur le corps en  $M$  une force :

$$\vec{f}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2}\vec{u}_r$$

avec  $\epsilon_0$  la permittivité du vide :  $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \text{ SI}$ .

La force est attractive si  $Qq < 0$  et répulsive si  $Qq > 0$ .

### 1.3 Énergie potentielle associée

Les deux forces centrales newtoniennes peuvent s'écrire sous la forme  $\vec{f} = -\frac{k}{r^2}\vec{u}_r$

avec  $k = \mathcal{G}M_0m$  pour l'interaction gravitationnelle et  $k = -\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0}$  (cas électrosta-

tique).

On détermine alors l'énergie potentielle associée :

$$\delta W = \vec{f}.d\vec{l} = -\frac{k}{r^2}dr = -dE_p \quad \Rightarrow \quad \frac{dE_p}{dr} = \frac{k}{r^2} \quad \text{donc} \quad E_p(r) = -\frac{k}{r} + cste$$

Par convention, on choisit  $\lim_{r \rightarrow +\infty} E_p(r) = 0$  (pas d'interaction quand les particules sont infiniment éloignées) et donc une constante nulle.

$$E_p = -\frac{\mathcal{G}M_0m}{r} \quad \text{et} \quad E_p = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r}$$

## 2 Lois générales de conservation

On considère un point matériel  $M$  soumis à une force  $\vec{F}$  centrale newtonienne.

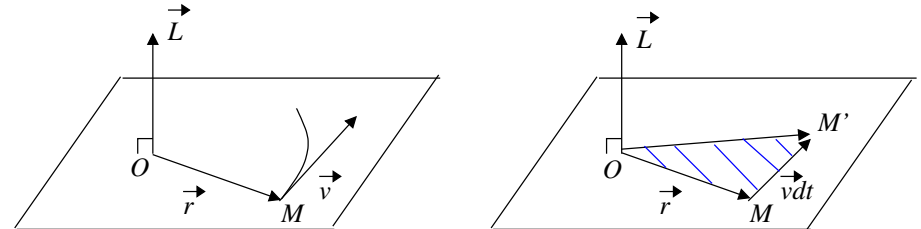
### 2.1 Conservation du moment cinétique

#### Mouvement à force centrale

Appliquons le théorème du moment cinétique en  $O$  dans le référentiel d'étude  $\mathcal{R}$  supposé galiléen pour le point matériel soumis à une force centrale :

$$\left(\frac{d\vec{L}_o}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \vec{M}_o(\vec{F}) = \underbrace{\vec{OM} \wedge \vec{F}}_{\vec{OM} // \vec{F}} = \vec{0}$$

En présence d'une force centrale, le moment cinétique en  $O$  est constant et égal à sa valeur initiale notée  $\vec{L}$ .



#### Caractère plan du mouvement

Par définition du moment cinétique  $\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$  comme un produit vectoriel, le vecteur position  $\vec{r}$  et le vecteur vitesse  $\vec{v}$  sont orthogonaux au moment cinétique,

la fixité de ce moment cinétique impose que la trajectoire reste dans un plan perpendiculaire au moment cinétique.

En présence d'une force centrale, le mouvement se situe dans un plan : le plan contenant  $O$  et perpendiculaire au moment cinétique  $\vec{L}$ .

### Loi des aires

Le moment cinétique en  $O$  étant constant, on peut choisir sa direction comme étant l'axe  $Oz$  ; on peut alors définir le vecteur position et le vecteur vitesse à l'aide des coordonnées polaires :

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v} = r\vec{u}_r \wedge m(\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta) = mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z = \overrightarrow{cst\vec{e}}$$

En présence d'une force centrale, la grandeur  $C = r^2\dot{\theta} = \frac{L}{m}$ , appelée **constante des aires**, est une constante du mouvement (on dit également intégrale première du mouvement).

Interprétation géométrique : pour un déplacement élémentaire,  $\frac{1}{2}|\vec{r} \wedge \vec{v}dt|$  représente l'aire  $dA$  du triangle  $OMM'$ , qui est l'aire balayée par le rayon vecteur  $\vec{r}$  pendant la durée  $dt$  :

$$dA = \frac{1}{2}|\vec{r} \wedge \vec{v}dt| = \frac{|\vec{r} \wedge \vec{v}|}{2}dt = \frac{Cdt}{2} \Leftrightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{C}{2}$$

Les aires balayées par le rayon vecteur sont proportionnelles au temps employé pour les balayer ou, tout aussi bien, le rayon vecteur balaie des aires égales en des temps égaux.

### Cas particulier du mouvement rectiligne

Dans le cas où  $\vec{r}_0$  et  $\vec{v}_0$  sont parallèles,  $\vec{L} = \vec{0}$ , le moment cinétique en  $O$  est initialement nul et le reste tout au long du mouvement, il ne peut pas définir une direction ; cependant, dans ce cas simplifié, le moment cinétique est une constante nulle et  $\vec{r}$  et  $\vec{v}$  restent donc parallèles, ce qui définit un mouvement rectiligne.

Imaginons par exemple le cas où la particule de masse  $m$  n'a pas de vitesse initiale, elle va se diriger en ligne droite vers le centre de force  $O$ , attirée par la particule de masse  $M_0$  en  $O$ .

## 2.2 Conservation de l'énergie mécanique

### Intégrale première du mouvement

La force centrale étant une force conservative, l'énergie mécanique se conserve et a pour expression :

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 + E_p(r) = E_m^0$$

La valeur de l'énergie mécanique est fixée par les conditions initiales.

### Énergie potentielle effective

En utilisant la constante des aires, nous allons exprimer l'énergie mécanique en fonction des seules variables  $r$  et  $\dot{r}$  :

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 + E_p(r) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + E_p(r) = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\frac{C^2}{r^4}\right) + E_p(r)$$

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{E_p(r) + \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2}}_{E_{p,eff}(r)}$$

En présence d'une force centrale, le mouvement radial est celui du mouvement à une dimension d'une particule soumise à une énergie potentielle effective :

$$E_{p,eff}(r) = E_p(r) + \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2}$$

## 2.3 Énergie potentielle effective et mouvements possibles

### Cas d'une force attractive ( $k > 0$ )

C'est toujours le cas de la force de gravitation et le cas de la force électrostatique dans le cas de deux particules ayant des charges de signe opposé.

On peut alors exprimer l'énergie potentielle effective sous la forme :

$$E_{p,eff}(r) = -\frac{k}{r} + \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} = \frac{k}{r}\left(\frac{mC^2}{2kr} - 1\right) = \frac{k}{r}\left(\frac{r_0}{r} - 1\right)$$

avec  $r_0 = \frac{mC^2}{2k}$  qui vérifie  $E_{p,eff}(r_0) = 0$ .

Étude de la fonction :

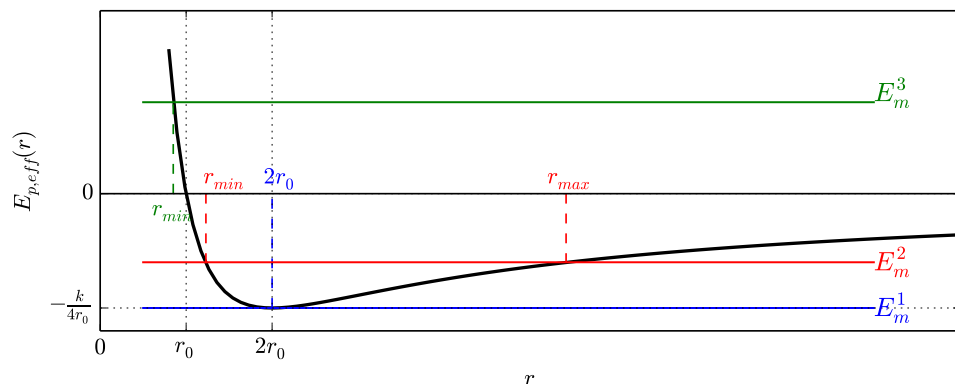
→  $E_{p,eff} \rightarrow +\infty$  quand  $r \rightarrow 0$  du fait de la composante orthoradiale de la vitesse.

→  $E_{p,eff} \rightarrow 0$  quand  $r \rightarrow +\infty$  du fait du choix de la constante.

\*  $\frac{dE_{p,eff}}{dr} = \frac{k}{r^2} \left(1 - \frac{2r_0}{r}\right)$ ; la fonction admet un minimum pour  $r = 2r_0$ , avec

$$E_{p,eff}(2r_0) = -\frac{k}{4r_0}$$

Étude graphique :



→ **États liés** :

\* Si  $\mathbf{E}_m = \mathbf{E}_m^1 = -k/(4r_0)$ , il y a une seule position radiale accessible  $r = 2r_0$  pour laquelle  $E_{p,eff}(2r_0) = E_m^0$ , la particule tourne sur un **cercle** de rayon  $2r_0$ .

\* Si  $\mathbf{E}_m = \mathbf{E}_m^2$  avec  $E_m^1 < E_m^2 < 0$ , le mouvement est borné, la particule ne peut s'échapper à l'infini et oscille radialement entre deux positions extrêmes  $r_{min}$  et  $r_{max}$  points pour lesquels  $E_{p,eff} = E_m$  et  $\dot{r} = 0$ ;

Notons qu'en ces deux points la particule n'est pas à l'arrêt car la vitesse ortho-radiale n'est pas nulle;

La trajectoire associée est une **ellipse**.

→ **États de diffusion** :

\* Si  $\mathbf{E}_m = \mathbf{E}_m^3 \geq 0$ , le mouvement n'est pas borné, la particule possède une distance minimale d'approche et finit par s'éloigner à l'infini;

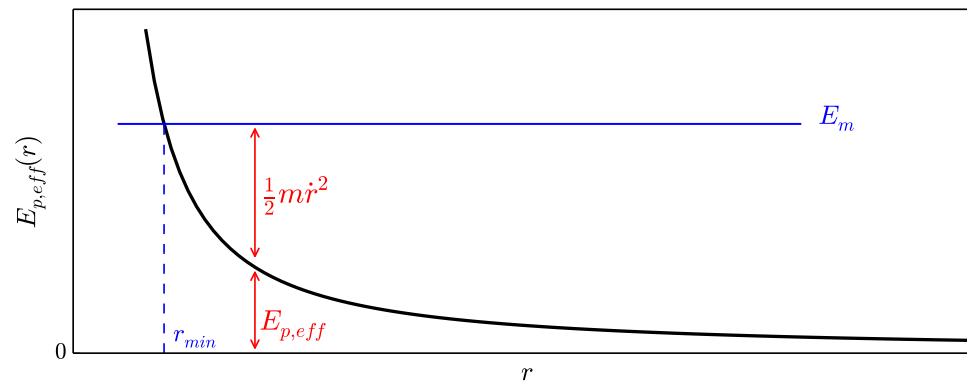
La trajectoire associée est une **parabole** ( $E_M = 0$ ) ou une **hyperbole** ( $E_M > 0$ ).

### Cas d'une force répulsive ( $k < 0$ )

C'est uniquement le cas de la force électrostatique pour deux particules ayant des charges de même signe.

On peut alors exprimer l'énergie potentielle effective sous la forme :

$$E_{p,eff}(r) = -\frac{k}{r} + \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} = \left(\frac{|k|}{r} + \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2}\right) \geq 0 \quad \forall r$$



Il s'agit nécessairement d'un **état de diffusion**; la trajectoire est hyperbolique avec une distance minimale d'approche définie par  $E_{p,eff}(r_{min}) = E_m$ .

## 3 Étude des trajectoires dans le cas de l'interaction gravitationnelle

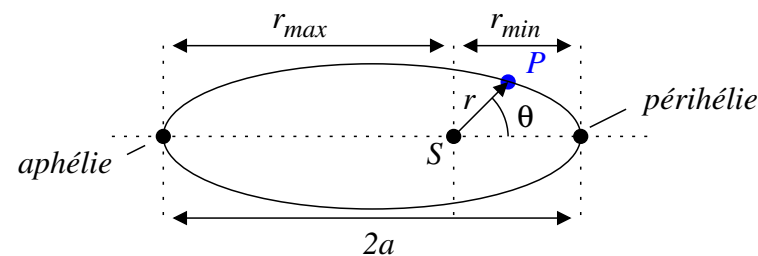
### 3.1 Énoncé des lois de Kepler

On énonce les lois de Kepler dans leur cadre historique, c'est à dire pour une planète  $P$  tournant autour du Soleil  $S$ ; notons que les énoncés sont tout à fait transposables pour un satellite gravitant autour d'une planète.

**Première loi** : dans le référentiel héliocentrique, la planète  $P$  décrit une ellipse dont le Soleil est l'un des foyers.

**Deuxième loi** : le rayon vecteur  $\vec{SP}$  balaie des aires égales en des temps égaux.

**Troisième loi** :  $\frac{a^3}{T^2}$ , le rapport du cube du demi-grand axe  $a$  par le carré de la période de révolution  $T$ , est le même pour toutes les planètes du système solaire.



### 3.2 Cas particulier du mouvement circulaire

#### Expression de la vitesse et troisième loi de Kepler

Considérons un corps de masse  $m$  soumis à la force de gravitation exercée par un corps de masse  $M_0$  situé en un point  $O$  fixe :

→ la force étant centrale, le mouvement se situe dans un plan perpendiculaire au moment cinétique et on utilise la base des coordonnées polaires pour décrire le mouvement ;

→ l'hypothèse d'une trajectoire circulaire impose  $r = R = cste$  ; la constante des aires  $C = R^2\dot{\theta}$  impose que le mouvement circulaire s'effectue à vitesse constante, telle que  $v = R\dot{\theta} = \frac{2\pi R}{T}$ , avec  $T$  la période de révolution ;

→ on applique alors la deuxième loi de Newton au corps dans le référentiel d'étude supposé galiléen :

$$m\vec{a} = \vec{f}_g \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} = -\frac{\mathcal{G}M_0}{R^2}\vec{u}_r$$

Il reste alors à exprimer l'accélération en coordonnées polaires (avec  $R = cste$ ,  $\dot{\theta} = cste$ ) :

$$-R\dot{\theta}^2\vec{u}_r = -\frac{\mathcal{G}M_0}{R^2}\vec{u}_r \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{v^2 = \frac{\mathcal{G}M_0}{R}}$$

En posant  $v = 2\pi R/T$ , on retrouve la troisième loi de Kepler, le rayon du cercle jouant ici le rôle du demi-grand axe :

$$\frac{(2\pi R)^2}{T^2} = \frac{\mathcal{G}M_0}{R} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{R^3}{T^2} = \frac{\mathcal{G}M_0}{4\pi^2}}$$

#### Exemple : satellite géostationnaire

Un satellite géostationnaire est un satellite artificiel qui reste constamment au-dessus d'un même point de la surface terrestre. Il apparaît immobile à un observateur sur Terre ; pour cela, le satellite doit posséder les caractéristiques suivantes :

- le plan de l'orbite est situé dans le **plan équatorial** ;
- le mouvement du satellite est **synchrone** avec le mouvement de rotation propre de la Terre autour de l'axe des pôles ;
- l'orbite est **circulaire**.

Connaissant la période de révolution  $T = 86164$  s, l'application de la troisième loi de Kepler permet d'en déduire le rayon de la trajectoire :

$$r_{geo} = \left( \frac{T^2 \mathcal{G}M_T}{4\pi^2} \right)^{1/3} = \left( \frac{86164^2 \times 6,67 \times 10^{-11} \times 5,98 \times 10^{24}}{4\pi^2} \right)^{1/3}$$

$$r_{geo} = 42,2 \times 10^3 \text{ km} \quad \Rightarrow \quad h = r_{geo} - R_T = 35,8 \times 10^3 \text{ km}$$

L'altitude d'un tel satellite est donc de l'ordre de 36000 km.

#### Aspects énergétiques

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{\mathcal{G}M_0m}{2R}}$$

$$\boxed{E_p = -\frac{\mathcal{G}M_0m}{R} = -2E_c}$$

$$\boxed{E_m = -\frac{\mathcal{G}M_0m}{2R}}$$

### 3.3 Mouvement elliptique

On admettra que la troisième loi de Kepler et l'expression de l'énergie mécanique restent valables, à condition de remplacer le rayon de la trajectoire circulaire par le demi-grand axe de la trajectoire elliptique :

$$\boxed{\frac{a^3}{T^2} = \frac{\mathcal{G}M}{4\pi^2}} \quad \text{et} \quad \boxed{E_m = -\frac{\mathcal{G}M_0m}{2a}}$$

Attention toutefois que, pour la trajectoire elliptique, l'énergie cinétique et l'énergie potentielle ne sont plus des constantes.

### 3.4 Vitesses cosmiques

#### Vitesse en orbite basse ou première vitesse cosmique

Sur une orbite circulaire de rayon  $r_0$ , la vitesse a pour expression :

$$v = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_0}{r_0}}$$

À la limite, le rayon doit au moins être égal au rayon de la planète qui sert d'attracteur, en pratique un peu plus pour éviter le frottement sur les couches atmosphériques ; à la limite, dans le cas de la Terre, on obtient pour la vitesse en orbite basse :

$$v = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{R_T}} = \sqrt{\frac{6,67 \times 10^{-11} \times 5,98 \times 10^{24}}{6400 \times 10^3}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v \simeq 7,9 \text{ km.s}^{-1}}$$

Cette vitesse représente la vitesse typique d'un satellite en révolution autour de la Terre en orbite basse.

## Vitesse de libération ou deuxième vitesse cosmique

Pour qu'un objet puisse atteindre l'infini, il doit disposer au minimum d'une énergie mécanique nulle, il atteint alors l'infini avec une vitesse nulle ; si cet objet est lancé depuis la surface d'un astre de rayon  $R$ , cela impose une vitesse minimale de lancer, appelée vitesse de libération :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GM_0m}{R} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{v_0^2 = \frac{2GM_0}{R}}$$

Pour la Terre, la vitesse de libération vaut  $v_0 = 11,2 \text{ km.s}^{-1}$ . Ainsi lancé, l'objet échappe alors à l'attraction terrestre.

## Capacités exigibles

→ Point matériel soumis à un seul champ de force centrale.

Déduire de la loi du moment cinétique la conservation du moment cinétique.

Connaître les conséquences de la conservation du moment cinétique : mouvement plan, loi des aires.

→ Énergie potentielle effective. État lié et état de diffusion

Exprimer la conservation de l'énergie mécanique et construire une énergie potentielle effective.

Décrire qualitativement le mouvement radial à l'aide de l'énergie potentielle effective. Relier le caractère borné à la valeur de l'énergie mécanique.

**Approche documentaire** : Relier l'échelle spatiale sondée à l'énergie mise en jeu lors d'une collision en s'appuyant sur l'expérience de Rutherford.

→ Champ newtonien. Lois de Kepler.

Énoncer les lois de Kepler pour les planètes et les transposer au cas des satellites terrestres.

→ Cas particulier du mouvement circulaire : satellite, planète.

Montrer que le mouvement est uniforme et savoir calculer sa période.

Établir la troisième loi de Kepler dans le cas particulier de la trajectoire circulaire.

Exploiter sans démonstration sa généralisation au cas d'une trajectoire elliptique.

→ Satellite géostationnaire.

Calculer l'altitude du satellite et justifier sa localisation dans le plan équatorial

→ Énergie mécanique dans le cas du mouvement circulaire puis dans le cas du mouvement elliptique.

Exprimer l'énergie mécanique pour le mouvement circulaire. Exprimer l'énergie mécanique pour le mouvement elliptique en fonction du demi-grand axe.

→ Vitesses cosmiques : vitesse en orbite basse et vitesse de libération.

Exprimer ces vitesses et connaître leur ordre de grandeur en dynamique terrestre.

## Applications directes

### AD 1. Orbite de la Terre autour du Soleil

Le centre  $T$  de la Terre est en mouvement approximativement circulaire uniforme autour du centre  $S$  du Soleil, à une distance  $TS = 1 \text{ u.a.} = 149,8 \times 10^6 \text{ km}$ .

Données :  $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2}$ , et  $M_S = 2,00 \times 10^{30} \text{ kg}$  masse du Soleil.

Calculer la période de révolution de Terre autour du Soleil ainsi que la vitesse de la Terre sur son orbite.

### AD 2. Distance minimale d'approche

On lance un proton en direction d'un noyau lourd supposé fixe de charge  $+Ze$  ; À l'instant initial, le proton est très loin du noyau et sa vitesse est  $v_0$ .

1. À l'aide un bilan énergétique, exprimer la distance minimale d'approche  $a_0$
2. Pour scruter à des échelles toujours plus petites la matière, on construit des accélérateurs toujours plus puissants. Justifier cette assertion à l'aide du résultat précédent.

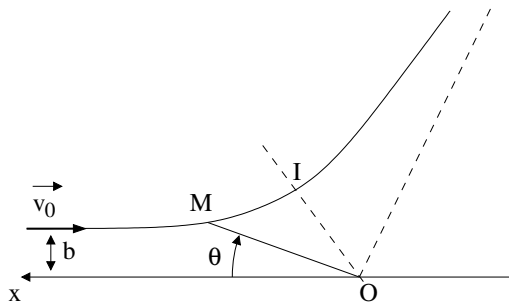
### AD 3. Mouvement de la planète Mars

Pour cet exercice, on considère que la Terre et Mars ont des orbites circulaires autour du Soleil. L'unité astronomique  $a_0$  désigne la distance du Soleil à la Terre. Sachant que la distance du Soleil à Mars est égale à  $1,5 a_0$ , déterminer, en année terrestre, la période de révolution de Mars autour de la Terre.

### AD 4. Distance minimale d'approche

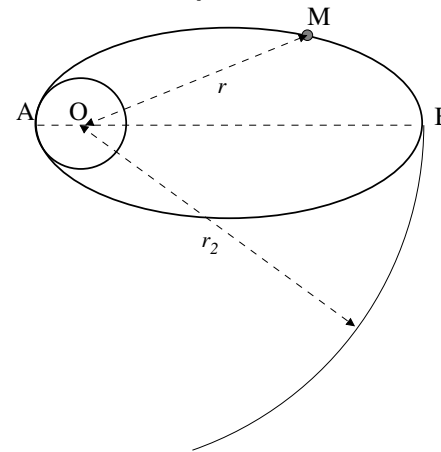
Un noyau d'hélium de masse  $m_1$  et de charge  $q_1 > 0$  subit une force de répulsion électrostatique d'un noyau d'or immobile en  $O$  de masse  $m_2$ , et de charge  $q_2 > 0$ . À l'instant initial, le noyau d'hélium est situé très loin du noyau d'or, la vitesse initiale est parallèle à l'axe  $Ox$  et la distance entre le support de la vitesse initiale et l'axe  $Ox$  est appelée paramètre d'impact, noté  $b$ .

En s'appuyant sur les grandeurs conservées (moment cinétique et énergie mécanique), exprimer la distance minimale d'approche  $r_m = OI$  en fonction de  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $m_1$ ,  $v_0$  et  $b$ .



### AD 5. Ellipse de transfert

Un satellite tourne initialement sur une orbite circulaire  $r_1 = OA$  autour de la Terre ; grâce à un moteur auxiliaire, on lui communique une vitesse supplémentaire, il s'éloigne alors sur la partie supérieure de l'ellipse de transfert ; une fois arrivé au point  $B$ , on communique un supplément de vitesse au satellite afin qu'il tourne sur une orbite circulaire de rayon  $r_2 = OB$ .



1. Exprimer le demi-grand axe de l'ellipse  $a$  en fonction de  $r_1$  et  $r_2$ .
2. Par une étude énergétique, déterminer l'expression de la vitesse  $v$  du satellite en un point  $M$  de la trajectoire elliptique en fonction de  $\mathcal{G}$ ,  $M_T$  la masse de la Terre,  $r$ ,  $r_1$  et  $r_2$ .
3. On appelle  $v_1$  la vitesse pour  $r = r_1$  et  $v_2$  la vitesse pour  $r = r_2$  ; en utilisant le résultat précédent montrer que  $v_1 r_1 = v_2 r_2$ . Interprétation.