Lycée Naval, Sup 2.
Mécanique 2. 4.1. Loi du moment cinétique.
4.2 Approche énergétique du mouvement d'un solide en rotation autour d'un axe fixe orienté, dans un référentiel galiléen.
4.3 Loi de l'énergie cinétique pour un système déformable.

Moment cinétique ; énergie cinétique d'un solide en rotation

Dans toute la suite, le mouvement est étudié dans un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen.

1 Moment cinétique

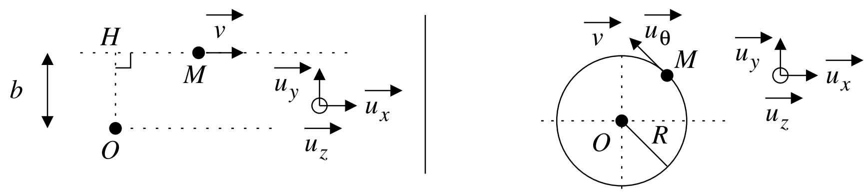
1.1 Moment cinétique d'un point matériel

Définition

Soit un point matériel M se déplaçant à la vitesse $\overrightarrow{v}_{\mathcal{R}}$ dans le référentiel d'étude $\mathcal{R}$. On appelle moment cinétique d'un point M par rapport à un point O dans un référentiel $\mathcal{R}$, le vecteur $\vec{L}_o$ défini par :

$$\boxed{\vec{L}_o(M)_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v}_{\mathcal{R}}}$$

Exemples



→ <u>Schéma de gauche</u> :
$$\vec{L}_o = \left(\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM}\right) \wedge m\vec{v} = b\vec{u}_y \wedge mv\vec{u}_x \quad \Rightarrow \quad \vec{L}_o = -mbv\vec{u}_z$$

→ <u>Schéma de droite</u> :
$$\vec{L}_o = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = R\vec{u}_r \wedge mR\dot{\theta}\vec{u}_\theta \quad \Rightarrow \quad \vec{L}_o = mR^2\dot{\theta}\vec{u}_z$$

Moment cinétique par rapport à un axe Δ orienté

Soit un axe Δ passant par O, de vecteur unitaire $\vec{u}$. La projection de $\vec{L}_o$ sur l'axe Δ est appelée moment cinétique par rapport à l'axe Δ et a pour expression :

$$\boxed{L_\Delta = \vec{L}_o.\vec{u}}$$

Ainsi dans l'exemple précédent du mobile en rotation autour de l'axe $\Delta = (Oz)$:
$$L_\Delta = mR^2\dot{\theta} = J_\Delta\dot{\theta}$$

$J_\Delta = mR^2$ représente le **moment d'inertie** du point M de masse m tournant à la distance R de l'axe Δ.

1.2 Moment cinétique d'un système de points

Définition

Soit un ensemble de points M_i de moments cinétiques respectifs $\vec{L}_{o,i}$ par rapport à O, le moment cinétique résultant pour l'ensemble du système est la somme des moments cinétiques individuels :

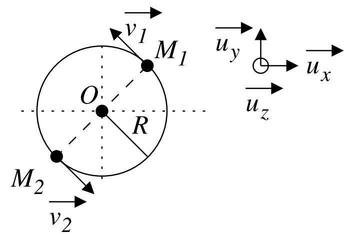
$$\vec{L}_o = \sum_i \vec{L}_{o,i}$$

Et en particulier, pour le moment cinétique par rapport à l'axe orienté $\Delta = (O, \vec{u})$:

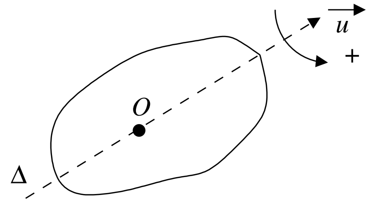
$$\boxed{L_\Delta = \sum_i L_{\Delta,i}}$$

Exemple

On considère deux points de masse identique tournant de concert autour de l'axe $\Delta = (Oz)$, on obtient : $L_\Delta = 2mR^2\dot{\theta}$



1.3 Solide en rotation autour d'un axe orienté Δ

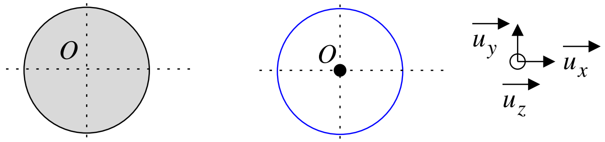


On considère un solide en rotation autour d'un axe $\Delta = (O, \vec{u})$ à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$.
Le moment cinétique de ce solide par rapport à l'axe Δ a pour expression :

$$\boxed{L_\Delta = J_\Delta \dot{\theta}}$$

avec J_Δ le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe Δ.

Exemples de moments d'inertie :



disque
masse m, rayon R

cerceau
masse m, rayon R

Pour le disque : $J_{Oz} = \dfrac{mR^2}{2}$; pour le cerceau : $J_{Oz} = mR^2$.

2 Moment d'une force

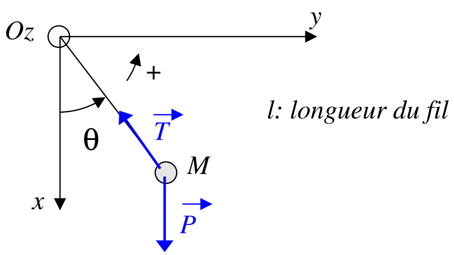
2.1 Moment d'une force par rapport à un point O

Définition

Soit un point matériel M soumis à une force $\vec{f}$. Le moment de la force $\vec{f}$, par rapport à un point O, est défini par le produit vectoriel de $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{f}$:

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}}_o(\vec{f}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}}$$

Exemple



$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_o(\vec{T}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{T} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\mathcal{M}}_o(\vec{P}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = -mgl\sin\theta\,\vec{u}_z$$

2.2 Moment d'une force par rapport à un axe Δ orienté

On considère un axe Δ passant par O, de vecteur directeur $\vec{u}$.

Définition

Soit un point matériel M soumis à une force $\vec{f}$. Le moment de la force $\vec{f}$ par rapport à l'axe $\Delta = (O, \vec{u})$ est défini par :

$$\boxed{\mathcal{M}_\Delta = \overrightarrow{\mathcal{M}}_o.\vec{u} = \left(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}\right).\vec{u}}$$

Conséquences

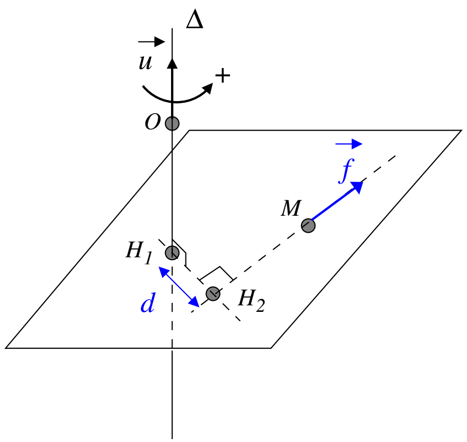
→ Si $\vec{f}$ est parallèle à Δ, $\mathcal{M}_\Delta = \left(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}\right).\vec{u} = 0$.

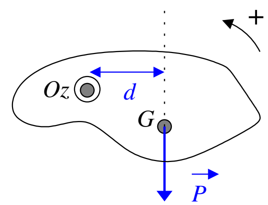
→ Si $\vec{f}$ est dans un plan perpendiculaire à Δ, alors on peut écrire (Cf. schéma) :

$$\mathcal{M}_\Delta = \left(\left(\overrightarrow{OH_1} + \overrightarrow{H_1H_2} + \overrightarrow{H_2M}\right) \wedge \vec{f}\right).\vec{u} = \left(\overrightarrow{H_1H_2} \wedge \vec{f}\right).\vec{u}$$

$$\boxed{\mathcal{M}_\Delta = \pm\, d \times f}$$

Dans cette dernière expression d représente la distance entre la droite support de la force $\vec{f}$ et l'axe Δ ; le moment est positif si la force contribue à une rotation dans le sens direct. L'effet est d'autant plus important que d est grand, c'est l'idée de « bras de levier » ; en particulier $\mathcal{M}_\Delta = 0$, si la force coupe l'axe.

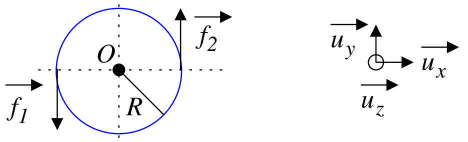




2.3 Notion de couple

On appelle **couple**, noté Γ, un moment de forces dont la résultante des forces est nulle.

Exemple : on considère deux forces de même norme f dont la résultante est nulle et qui contribuent à produire un couple selon de l'axe Oz : $\Gamma_\Delta = 2fR$.



3 Théorème du moment cinétique

3.1 Théorème du moment cinétique pour un point matériel

Énoncé

Dans un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen, par rapport à un point O **fixe**, pour un point matériel M soumis à des forces $\vec{f_i}$, la dérivée du moment cinétique de M par rapport à O est égal à la somme des moments des forces par rapport à O :

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \sum_i \overrightarrow{\mathcal{M}}_o\left(\vec{f_i}\right)}$$

Et de même, en projection selon un axe fixe $\Delta = (O, \vec{u})$:

$$\boxed{\frac{dL_\Delta}{dt} = \sum_i \mathcal{M}_\Delta\left(\vec{f_i}\right)}$$

Justification

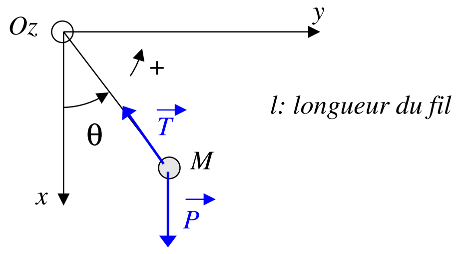
Considérons un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen, un point O fixe dans ce référentiel, ainsi qu'un point M soumis à des forces $\vec{f_i}$ et calculons la dérivée du moment cinétique par rapport à O dans ce référentiel :

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge m\vec{v} + \overrightarrow{OM} \wedge m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \underbrace{\vec{v} \wedge m\vec{v}}_{=\vec{0}} + \overrightarrow{OM} \wedge m\frac{d\vec{v}}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{a} = \overrightarrow{OM} \wedge \sum_i \vec{f_i}$$

Exemple

Nous allons appliquer le théorème du moment cinétique dans le cas du pendule simple ; l'intérêt de ce théorème est que, si la force de tension inconnue n'est pas nulle, son moment par rapport à O l'est, ce qui fait disparaître cette inconnue des équations.



Le théorème du moment cinétique, par rapport à O, appliqué à la masse dans le référentiel d'étude supposé galiléen permet d'écrire :

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \sum_i \overrightarrow{\mathcal{M}}_{o,i} = \underbrace{\overrightarrow{OM} \wedge \vec{T}}_{=\vec{0} \text{ car } \vec{T} /\!/ \overrightarrow{OM}} + \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P}$$

avec $\vec{L}_o = ml^2\dot{\theta}\vec{u}_z$ et $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = -mgl\sin\theta\vec{u}_z$.

On retrouve bien l'équation du mouvement du pendule simple :

$$ml^2\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

3.2 Loi scalaire du moment cinétique pour un solide

Énoncé

Dans un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen, la dérivée du moment cinétique du solide par rapport à son axe de rotation fixe $\Delta = (O, \vec{u})$ est égale à la somme des moments des forces par rapport à ce même axe :

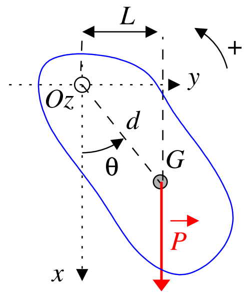
$$\boxed{\frac{dL_\Delta}{dt} = J_\Delta\ddot{\theta} = \sum_i \mathcal{M}_\Delta\left(\vec{f_i}\right)}$$

Exemple 1 : pendule pesant

Un pendule pesant est un solide de masse m, mobile autour d'un axe horizontal fixe $\Delta = (O, \vec{u}_z)$.

On se place dans les hypothèses suivantes :

→ on néglige les frottements ;
→ on suppose une liaison pivot idéale dont le moment par rapport à l'axe (Oz) est nul.
→ On note d la distance de O au centre de masse G et on note J_Δ le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe Δ.

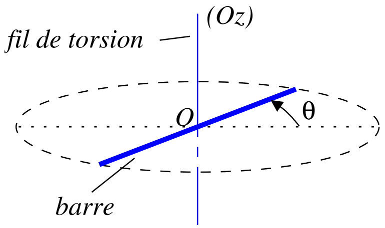


L'application du théorème du moment cinétique pour le solide par rapport à l'axe Oz conduit à :

$$J_\Delta \ddot{\theta} = -mgL = -mgd\sin\theta \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 = \frac{mgd}{J_\Delta}$$

Exemple 2 : pendule de torsion

Un pendule de torsion est constitué d'une barre horizontale fixée à un fil de torsion attaché en son centre et exerçant sur la barre un couple de torsion proportionnel à l'angle de torsion θ, $\Gamma = -C\theta$, avec C la constante de torsion.



La barre est soumise à son poids, à la réaction du fil de torsion (toutes deux passant par O donc de moment nul par rapport à l'axe Oz) et au couple de torsion Γ.

L'application du théorème du moment cinétique par rapport à l'axe (Oz) conduit à :

$$\frac{dL_\Delta}{dt} = \Gamma \quad \Leftrightarrow \quad J_\Delta \ddot{\theta} = -C\theta \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{C}{J_\Delta}\theta = 0$$

On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0^2 = \dfrac{C}{J_\Delta}$.

En multipliant l'équation du théorème du moment cinétique par $\dot{\theta}$, on obtient une intégrale première du mouvement caractérisant la conservation de l'énergie mécanique du système :

$$J_\Delta \ddot{\theta}\dot{\theta} + C\theta\dot{\theta} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}J_\Delta \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}C\theta^2\right) = 0$$

→ $\dfrac{1}{2}J_\Delta \dot{\theta}^2$: énergie cinétique de rotation ;
→ $\dfrac{1}{2}C\theta^2$: énergie potentielle élastique stockée dans le fil de torsion.

4 Solide en rotation ; aspects énergétiques

Dans ce paragraphe, on se limite au cas d'un **solide** en **rotation autour d'un axe fixe**.

4.1 Énergie cinétique

Un solide de moment d'inertie J_Δ en rotation autour d'un axe fixe $\Delta = (O, \vec{u})$ à la vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$ possède une énergie cinétique :

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}J_\Delta \omega^2 = \frac{1}{2}J_\Delta \dot{\theta}^2}$$

4.2 Théorème de l'énergie cinétique

La dérivée temporelle de l'énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe, est égale à la puissance de l'ensemble des forces extérieures $\vec{f_i}$ appliquées :

$$\boxed{\frac{dE_c}{dt} = \sum_i \mathcal{P}(\vec{f}_i^{ext}) = \sum_i \mathcal{M}_{\Delta,i}^{ext} \times \omega}$$

Remarque : on obtient ce résultat en multipliant la loi du moment cinétique scalaire par la vitesse angulaire ω :

$$\left(J_\Delta \frac{d\omega}{dt} = \sum_i \mathcal{M}_{\Delta,i}\right)\omega \quad \Leftrightarrow \quad J_\Delta \frac{d\omega}{dt}\omega = \sum_i \mathcal{M}_{\Delta,i}\omega$$

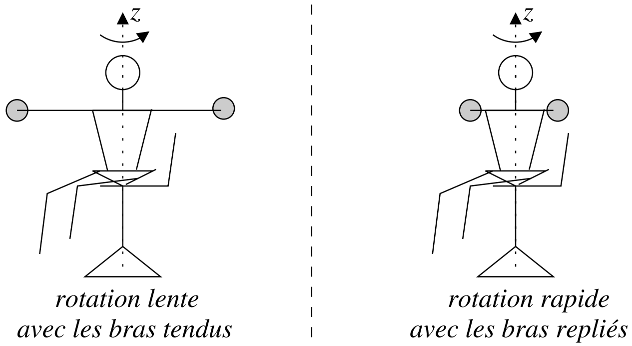
Dans le cas d'un solide en rotation, les théorèmes de l'énergie cinétique et du moment cinétique projeté selon l'axe de rotation sont donc tout à fait équivalents.

5 Système déformable

5.1 Exemple du tabouret d'inertie

Principe

On considère une personne portant un haltère dans chaque main et assise sur un tabouret pouvant tourner librement autour d'un axe fixe $\Delta = (Oz)$. Le système est mis en rotation alors que la personne a les bras tendus.



rotation lente avec les bras tendus — *rotation rapide avec les bras repliés*

On constate que la vitesse angulaire augmente significativement lorsque la personne rapproche ses bras de l'axe et ceci d'autant plus que les masses des haltères sont importantes.

Explication : conservation du moment cinétique

On considère le système composé des haltères, de la personne et de la partie mobile du tabouret.

Le système est soumis à son poids, force verticale dont le moment selon Oz est nul. En supposant la liaison pivot parfaite, on peut considérer que le couple de cette liaison est aussi nul. En conséquence :

$$\frac{dL_\Delta}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(J_\Delta \omega\right) = 0$$

La grandeur $J_\Delta \omega$ se conserve, en notant avec des indices T pour « bras tendus » et R pour bras repliés :

$$J_{\Delta,T}\omega_T = J_{\Delta,R}\omega_R$$

Lorsque les bras se replient, les masses se rapprochent de l'axe et le moment d'inertie diminue ce qui entraîne l'augmentation de la vitesse angulaire afin d'assurer la **conservation du moment cinétique**.

Aspect énergétique

Comparons alors les énergies cinétiques :

$$E_{c,T} = \frac{1}{2} J_{\Delta,T}\omega_T^2 \quad \text{et} \quad E_{c,R} = \frac{1}{2} J_{\Delta,R}\omega_R^2$$

$$E_{c,R} = \frac{1}{2}\left(J_{\Delta,R}\omega_R\right) \times \omega_R = \frac{1}{2}\left(J_{\Delta,T}\omega_T\right)\omega_R = \frac{1}{2} J_{\Delta,T}\omega_T^2 \times \frac{\omega_R}{\omega_T} \quad \Rightarrow \quad E_{c,R} = \frac{\omega_R}{\omega_T} E_{c,T}$$

On constate que l'énergie cinétique de rotation n'est pas une constante. Pourtant les masses restant à altitude fixée, le travail du poids est nul, de même pour la liaison pivot

L'augmentation de l'énergie cinétique est due au <u>travail des forces intérieures</u>. Il s'agit ici des forces musculaires exercées par la personne pour plier ses bras.

> Lorsqu'un système se déforme, les forces intérieures fournissent une puissance non nulle.
> La puissance des forces intérieures est en revanche nulle pour un système indéformable.

5.2 Théorème de l'énergie cinétique pour un système déformable

Dans un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen, la dérivée temporelle de l'énergie cinétique du système est égale à la puissance de l'ensemble des forces extérieures et intérieures :

$$\boxed{\frac{dE_c}{dt} = \sum_{i,int} \mathcal{P}(\vec{f_i}) + \sum_{j,ext} \mathcal{P}(\vec{f_j})}$$

****

<u>Capacités exigibles</u>

<u>Loi du moment cinétique</u> :

→ Moment cinétique d'un point matériel par rapport à un point et par rapport à un axe orienté.
Relier la direction et le sens du vecteur moment cinétique aux caractéristiques du mouvement.

→ Moment cinétique d'un système discret de points par rapport à un axe orienté.
Maîtriser le caractère algébrique du moment cinétique scalaire.

→ Généralisation au cas du solide en rotation autour d'un axe : moment d'inertie.
Exploiter la relation pour le solide entre le moment cinétique scalaire, la vitesse

angulaire de rotation et le moment d'inertie fourni.
Relier qualitativement le moment d'inertie à la répartition des masses.

→ Moment d'une force par rapport à un point ou un axe orienté. Couple.
Calculer le moment d'une force par rapport à un axe orienté en utilisant le bras de levier.
Définir un couple.

→ Loi du moment cinétique en un point fixe dans un référentiel galiléen.
Reconnaître les cas de conservation du moment cinétique.

→ Loi scalaire du moment cinétique appliquée au solide en rotation autour d'un axe fixe orienté dans un référentiel galiléen.

→ Pendule de torsion.
Établir l'équation du mouvement.
Expliquer l'analogie avec l'équation de l'oscillateur harmonique.
Établir une intégrale première du mouvement.

→ Pendule pesant.
Établir l'équation du mouvement.
Expliquer l'analogie avec l'équation de l'oscillateur harmonique.
Établir une intégrale première du mouvement.
Lire et interpréter le portrait de phase : bifurcation entre un mouvement pendulaire et un mouvement révolutif.

Approche énergétique du mouvement d'un solide en rotation autour d'un axe fixe orienté, dans un référentiel galiléen :

→ Énergie cinétique d'un solide en rotation.
Utiliser la relation $E_c = \dfrac{1}{2}J_\Delta\omega^2$, J_Δ étant fourni.

→ Loi de l'énergie cinétique pour un solide.
Établir l'équivalence dans ce cas entre la loi scalaire du moment cinétique et celle de l'énergie cinétique.

Loi de l'énergie cinétique pour un système déformable

Bilan énergétique du tabouret d'inertie.
Prendre en compte le travail des forces intérieures. Utiliser sa nullité dans le cas d'un solide.

Applications directes

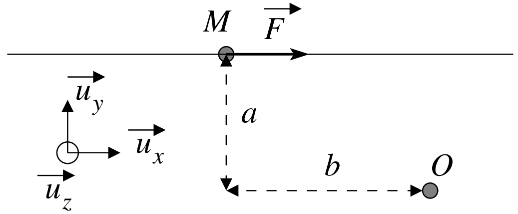
AD 1. Produit vectoriel

La base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ est la base des coordonnées cartésiennes et $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ est la base des coordonnées cylindriques associées.

Choisir la ou les bonne(s) réponse(s) :
a) $\vec{u}_x \wedge \vec{u}_z = \vec{u}_y$; b) $\vec{u}_x \wedge \vec{u}_y = \vec{u}_z$; c) $\vec{u}_r \wedge \vec{u}_y = -\cos\theta\vec{u}_z$; d) $\vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_y = -\sin\theta\vec{u}_z$

AD 2. Moment d'une force

Déterminer le moment de la force $\vec{F}$ par rapport à O.



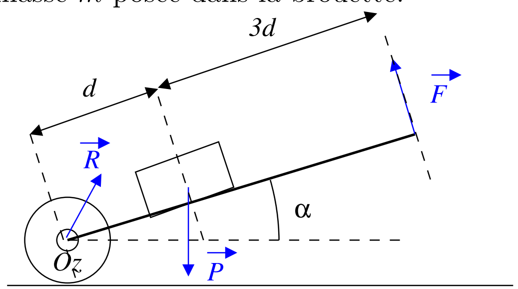
AD 3. Mise en rotation d'un volant

Pour mettre en rotation un volant assimilé à un cylindre homogène de rayon $R = 50$ cm et de masse $M = 200$ kg, on utilise un moteur fournissant une puissance constante $\mathcal{P} = 2,0$ kW.
Quelle est la durée minimale pour que le volant atteigne une vitesse de rotation de 2000 tours par minute depuis une position immobile ?

On donne le moment d'inertie d'un cylindre plein par rapport à son axe Δ : $J_\Delta = \dfrac{1}{2}MR^2$.

AD 4. Équilibre d'une brouette

On considère l'équilibre d'une brouette représentée ci-dessous. On exerce une force $\vec{F}$ pour soulever la masse m posée dans la brouette.



Déterminer la norme F=$\|\vec{F}\|$ en fonction de m, g et α.
Justifier alors l'intérêt de la brouette.