Lycée Naval, Sup 2.
MÉCANIQUE 1. 3. Mouvement de particules chargées dans des champs électrique et magnétique, uniformes et stationnaires

Mouvement de particules chargées

1 Force de Lorentz

1.1 Expression

En présence d'un champ électrique $\vec{E}$ et d'un champ magnétique $\vec{B}$, une particule de charge électrique q possédant une vitesse $\vec{v}$ est soumise à une force, appelée force de Lorentz, telle que :

$$\boxed{\vec{f} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}}$$

Remarques :

— $\vec{f}_e = q\vec{E}$ est la partie électrique de la force ;
— $\vec{f}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ est la partie magnétique de la force ;
— le rapport E/B est homogène à une vitesse.

1.2 Puissance de la force de Lorentz

Seule la partie électrique de la force de Lorentz a une puissance non nulle :

$$\mathcal{P} = \vec{f}.\vec{v} = q\vec{E}.\vec{v} + q\underbrace{\left(\vec{v} \wedge \vec{B}\right).\vec{v}}_{=0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{P} = q\vec{E}.\vec{v}}$$

→ Seul le champ électrique peut modifier l'énergie cinétique d'une particule ;

→ nous verrons qu'un champ magnétique peut, quant à lui, courber la trajectoire sans modifier l'énergie de la particule.

2 Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique uniforme et constant

2.1 Cadre de l'étude

⋆ On s'intéresse dans ce paragraphe au mouvement d'une particule chargée en présence d'un unique champ électrostatique $\vec{E}$ que l'on suppose uniforme et constant.
⋆ Le poids $\vec{P}$ d'une particule élémentaire est totalement négligeable vis à vis de la force électrique ; par exemple, pour un électron et un champ électrique de norme $E = 1$ V.m^{-1} (valeur très modeste) :

$$\frac{P}{|qE|} = \frac{m_e g}{eE} = \frac{9,1 \times 10^{-31} \times 10}{1,6 \times 10^{-19} \times 1} \simeq 6 \times 10^{-11} \ll 1$$

2.2 Équations du mouvement

Deuxième loi de Newton : on applique la deuxième loi de Newton à la particule de charge q et de masse m soumise à la seule force électrique dans le référentiel du laboratoire :

$$m\vec{a} = q\vec{E} \quad \text{donc} \quad \boxed{\vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m}}$$

La particule subit un mouvement à **vecteur-accélération constant**.

Aspect énergétique : la force électrique dérive d'une énergie potentielle d'expression $E_p = qV$ avec V le potentiel électrique.

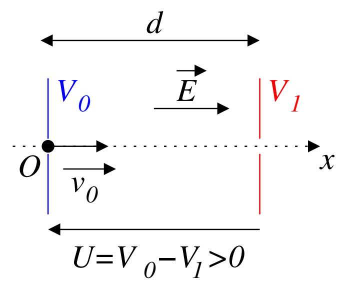
La seule force présente dérive d'une énergie potentielle, **l'énergie mécanique de la particule se conserve** :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + qV = cste$$

2.3 Accélérateur linéaire

Considérons l'exemple d'un proton (charge e, vitesse initiale $\vec{v}_0$) accéléré par un champ électrique $\vec{E}$ tel que $\vec{v}_0 // \vec{E}$: le champ électrique est créé par un système de deux plaques portées à des potentiels V_0 et V_1, on admettra que sa norme vérifie :

$$E = (V_0 - V_1)/d$$



Équation horaire :
L'accélération et la vitesse initiale étant selon (Ox), le mouvement s'effectue le long de l'axe (Ox) :

$$a_x = \frac{eE}{m} \quad \text{d'où} \quad v_x(t) = \frac{eE}{m}t + v_0 \quad \text{et} \quad x(t) = \frac{eE}{2m}t^2 + v_0 t$$

Équation énergétique : (à privilégier)

$$\frac{1}{2}mv^2 + eV(x) = \frac{1}{2}mv_0^2 + eV_0$$

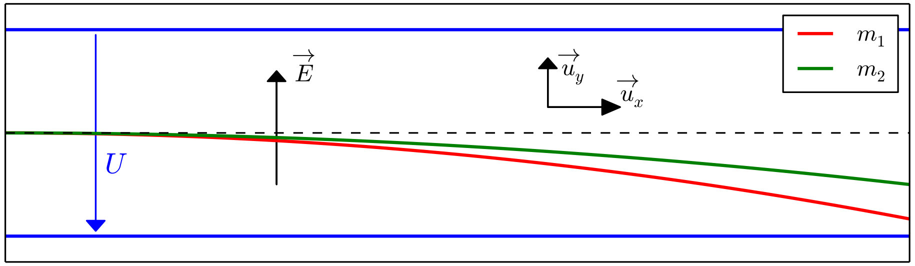
En particulier à la sortie de l'accélérateur :

$$v_1^2 = v_0^2 + \frac{2e(V_0 - V_1)}{m} = v_0^2 + \frac{2eU}{m}$$

Notons qu'accéléré sous une différence de potentiel (tension) $U = 1,0$ kV, un électron atteint une vitesse proche de 2×10^7 m.s^{-1}, il est alors nécessaire de tenir compte de corrections relativistes.

2.4 Mouvement parabolique

On considère le cas général d'une particule de charge $-e$, de vecteur vitesse initial $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_x$ soumis à un champ électrique $\vec{E} = E\vec{u}_y$.



Équations horaires : partant des composantes du vecteur accélération, on en déduit les équations horaires :

$$a_x = 0 \quad \Rightarrow \quad v_x(t) = v_0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = v_0 \times t$$
$$a_y = -\frac{eE}{m} \quad \Rightarrow \quad v_y(t) = -\frac{eE}{m}t \quad \Rightarrow \quad y(t) = -\frac{eE}{2m}t^2$$

Équation de la trajectoire :

$$y(x) = -\frac{eEx^2}{2mv_0^2}$$

2.5 Applications

Ce type de dispositifs peut servir à accélérer les particules (accélérateur linéaire électrostatique, accélérateur linéaire à radiofréquences), dévier des particules chargées (tube cathodique d'un oscilloscope analogique), séparer des particules (spectrographe de masse).

3 Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme et constant

3.1 Cadre de l'étude

⋆ On s'intéresse dans ce paragraphe au mouvement d'une particule chargée en présence d'un unique champ magnétique $\vec{B}$ que l'on suppose uniforme et constant.

⋆ Le poids P d'une particule élémentaire est totalement négligeable vis à vis de la force magnétique ; par exemple pour un électron, un champ magnétique de norme $B = 1$ T et une vitesse $v = 1$ m.s^{-1} :

$$\frac{P}{|qvB|} = \frac{m_e g}{evB} = \frac{9,1 \times 10^{-31} \times 10}{1,6 \times 10^{-19}} \simeq 6 \times 10^{-11} \ll 1$$

⋆ En l'absence d'une force électrique, la puissance de la force de Lorentz est nulle, en conséquence : $\boxed{||\vec{v}|| = cste}$.

3.2 Étude du mouvement ($\vec{B} \perp \vec{v}_0$)

On suppose que le vecteur-vitesse initial est perpendiculaire au champ magnétique : $\vec{v} = v_0\vec{u}_x$ et $\vec{B} = B\vec{u}_z$.

<u>Caractère plan du mouvement</u> :

Dans le référentiel d'étude supposé galiléen, on applique le principe fondamental de la dynamique à la particule de charge q soumise uniquement à l'action du champ magnétique :

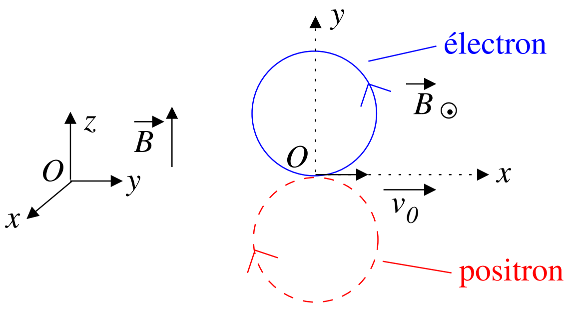
$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \wedge \vec{B} \quad \Rightarrow \quad m\frac{dv_z}{dt} = q\left(\vec{v} \wedge B\vec{u}_z\right).\vec{u}_z = 0$$

La particule n'ayant initialement pas de vitesse selon l'axe Oz, elle n'en acquiert pas par la suite et **le mouvement s'effectue dans le plan** xOy.

<u>Étude du mouvement circulaire</u> :

Conformément au programme, on admet le caractère circulaire du mouvement. Le mouvement étant de plus uniforme (puissance nulle pour la force magnétique), en appelant R le rayon de la trajectoire, on a :

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{u}_r \quad \text{et} \quad \vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = -\frac{v_0^2}{R}\vec{u}_r$$



Le vecteur vitesse et le champ magnétique étant à tout instant perpendiculaires :

$$||q\vec{v} \wedge \vec{B}|| = |q|v_0 B$$

La comparaison de la norme de l'accélération et de la norme de la force conduit à l'égalité :

$$m\frac{v_0^2}{R} = |q|v_0 B \quad \Rightarrow \quad mv_0 = |q|BR$$

Connaissant la relation entre la vitesse et le rayon de la trajectoire, on en déduit la vitesse angulaire, appelée **pulsation cyclotron** :

$$\omega_c = \frac{v_0}{R} = \frac{|q|B}{m}$$

En résumé :

Si $\vec{B} \perp \vec{v}_0$, la particule (de charge q et de masse m) effectue un mouvement circulaire uniforme dans un plan perpendiculaire au champ magnétique :

⋆ à la vitesse angulaire $\boxed{\omega_c = \frac{|q|B}{m}}$, appelée pulsation cyclotron.

⋆ avec pour le rayon du cercle $R = \frac{v_0}{\omega_c} = \frac{mv_0}{|q|B}$ ($\boxed{p = qBR}$)

⋆ le sens de rotation dépendant du signe de la charge.

Applications :
Ce type de dispositifs permet de dévier sélectivement et donc de séparer des isotopes (spectrographe de masse), est utilisé dans des accélérateurs de particules (cyclotron, synchrocyclotron, synchrotron) pour maintenir les particules sur des trajectoires circulaires, et aussi pour identifier des particules chargées (détecteurs des collisionneurs de particules).

Complément : caractère circulaire du mouvement

Dans le cas d'un mouvement pour lequel $\vec{B} \perp \vec{v}_0$, on applique la deuxième loi de Newton à un électron ($q = -e$), ce qui donne en projection :

$$m\frac{dv_x}{dt} = -ev_y B \qquad m\frac{dv_y}{dt} = ev_x B \qquad m\frac{dv_z}{dt} = 0$$

On constate que $v_z = cste = v_z(0) = 0$, le mouvement de la particule est contenu dans le plan (xOy) perpendiculaire au champ magnétique.

On pose $\omega_c = \frac{eB}{m}$, appelée pulsation cyclotron (indépendante de v_0).

$$\frac{dv_x}{dt} = -\omega_c v_y \quad (1) \quad \text{et} \quad \frac{dv_y}{dt} = \omega_c v_x \quad (2)$$

On dérive (1) et on reporte (2) dans (1) pour obtenir :

$$\ddot{v}_x + \omega_c^2 v_x = 0 \quad \text{avec} \quad v_x(0) = v_0 \quad \text{et} \quad \dot{v}_x(0) = 0$$

⋆ la solution est $v_x(t) = v_0 \cos(\omega_c t)$;
⋆ en utilisant à nouveau (1) on en déduit $v_y(t) = v_0 \sin(\omega_c t)$.

On intègre une nouvelle fois pour déterminer les équations horaires avec $x(0) = 0$ et $y(0) = 0$:

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega_c t) \quad \text{et} \quad y(t) = \frac{v_0}{\omega}(1 - \cos(\omega_c t))$$

On reconnaît les équations paramétriques horaires d'un cercle de rayon $R = v_0/\omega_c$, en effet :

$$x^2 + \left(y - \frac{v_0}{\omega_c}\right)^2 = \left(\frac{v_0}{\omega_c}\right)^2$$

****

Capacités exigibles

→ Force de Lorentz exercée sur une charge ponctuelle ; champs électrique et magnétique.
Évaluer les ordres de grandeur des forces électrique ou magnétique et les comparer à ceux des forces gravitationnelles.

→ Puissance de la force de Lorentz.
Savoir qu'un champ électrique peut modifier l'énergie cinétique d'une particule alors qu'un champ magnétique peut courber la trajectoire sans fournir d'énergie à la particule.

→ Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrostatique uniforme.
Mettre en équation le mouvement et le caractériser comme un mouvement à vecteur-accélération constant.
Effectuer un bilan énergétique pour calculer la vitesse d'une particule chargée accélérée par une différence de potentiel.
Citer une application

→ Mouvement circulaire d'une particule chargée dans un champ magnétostatique uniforme dans le cas où le vecteur-vitesse initial est perpendiculaire au champ magnétique.
Déterminer le rayon de la trajectoire sans calcul en admettant que celle-ci est circulaire.

Approche documentaire : analyser des documents scientifiques montrant les limites relativistes en s'appuyant sur les expressions fournies : $E_c = (\gamma - 1)mc^2$ et $p = \gamma m v$

****

Applications directes

AD 1. Accélération d'un électron, limite relativiste

Un électron de vitesse initiale nulle est accéléré dans le vide par un champ électrostatique $\vec{E}$. On note U la différence de potentiel entre la position pour laquelle la particule atteint la vitesse v et la position initiale.
Données : $e = 1,6 \times 10^{-19}$ C, $m = 9,1 \times 10^{-31}$ kg, $c = 3,0 \times 10^8$ m.s^{-1}.

1. Exprimer la vitesse v en fonction des données.
2. En déduire la valeur limite U_{lim} de la tension accélératrice telle que l'électron reste non relativiste, c'est à dire telle que la vitesse v reste inférieure à 10% de la célérité de la lumière dans le vide.

AD 2. Identification d'une particule

Un détecteur est constitué d'un champ magnétique $\vec{B} = B_0 \vec{u}_z$ avec $B_0 = 1,0$ mT.
Une particule élémentaire entre dans le dispositif avec une vitesse initiale $v_0 = 1,76 \times 10^6$ m.s^{-1} selon (Ox).
On constate que la particule a une trajectoire circulaire de rayon $R = 1,0$ cm, la particule tournant dans le sens trigonométrique par rapport à (Oz).
La particule pénètre alors dans un calorimètre qui enregistre l'énergie cinétique de la particule égale à : $8,8$ eV.
Identifier la particule (on rappelle 1 eV $= 1,6 \times 10^{-19}$ J).