Lycée Naval, Sup 2.
Mécanique 1. 2.2. Approche énergétique du mouvement du point matériel

Étude énergétique de la dynamique du point matériel

Pour toute la suite, on se place dans un référentiel $\mathcal{R}$ supposé galiléen.

1 Travail et puissance d'une force

1.1 Travail d'une force

Travail élémentaire : soit un point matériel M soumis à une force $\vec{F}$. Au cours d'un déplacement élémentaire $d\vec{l}$ du point, la force exerce un travail élémentaire :

$$\boxed{\delta W(\vec{F}) = \vec{F}.\vec{dl}}$$

Pour un déplacement fini allant d'un point A à un point B, la force $\vec{F}$ exerce un ***travail*** W :

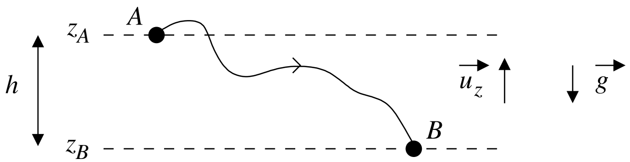
$$\boxed{W(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F}.\vec{dl}}$$

Remarques :
→ le travail, produit d'une force par une longueur, a la dimension d'une énergie ;
→ si la force est orthogonale en tout point au déplacement, $W_{AB}(\vec{F}) = 0$;
→ pour une force $\vec{F} = \vec{F_0}$ identique en tout point, $W_{AB}(\vec{F}) = \vec{F_0}.\overrightarrow{AB}$;
→ pour $W_{AB}(\vec{F}) > 0$, le travail est dit « **moteur** » ; pour $W_{AB}(\vec{F}) < 0$, le travail est dit « **résistant** ».

1.2 Exemples

Travail du poids

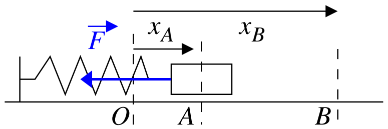
On considère un point matériel de masse m se déplaçant de A à B dans le champ de pesanteur terrestre.



$$W_{AB}(\vec{P}) = m\vec{g}.\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{W_{AB}(\vec{P}) = mg(z_A - z_B)}$$

Travail de la force de rappel élastique

On s'intéresse au travail de la force de rappel d'un ressort lorsque la masse se déplace de A à B :



$$W_{AB}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F}.\vec{dl} = \int_{x=x_A}^{x_B} (-kx\vec{u}_x).dx\vec{u}_x = \left[-k\frac{x^2}{2}\right]_{x_A}^{x_B} = \frac{k}{2}\left(x_A^2 - x_B^2\right)$$

1.3 Puissance d'une force

Une force $\vec{F}$ exerçant un travail δW en une durée dt délivre une puissance instantanée $\mathcal{P}$:

$$\boxed{\mathcal{P} = \frac{\delta W}{dt}}$$

Pendant dt, le mobile se déplace de $\vec{dl}$ à la vitesse $\vec{v} = \dfrac{\vec{dl}}{dt}$, la puissance peut donc aussi s'exprimer selon :

$$\mathcal{P} = \frac{\delta W}{dt} = \frac{\vec{F}.\vec{dl}}{dt} = \vec{F}.\frac{\vec{dl}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{P} = \vec{F}.\vec{v}}$$

La puissance s'exprime en watt (W=J/s) dans le système international d'unités.

2 Énergie cinétique

2.1 Définition

L'énergie cinétique d'un point matériel de masse m animé d'une vitesse $\vec{v}$ est définie par :

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}mv^2}$$

2.2 Théorème de la puissance cinétique

La dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique est égale à la somme des puissances des forces s'exerçant sur le mobile :

$$\boxed{\frac{dE_c}{dt} = \sum_i \mathcal{P}(\vec{F_i})}$$

Justification : dans le référentiel $\mathcal{R}$ galiléen, on applique le principe fondamental de la dynamique au point matériel de masse m :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i \quad \Rightarrow \quad m\frac{d\vec{v}}{dt}.\vec{v} = \sum_i \vec{F}_i.\vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \sum_i \mathcal{P}(\vec{F}_i)$$

2.3 Théorème de l'énergie cinétique

La variation d'énergie cinétique d'un point matériel lors du déplacement de A à B est égale au travail des forces s'exerçant sur ce mobile :

$$\boxed{\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = \sum_i W_{AB}(\vec{F}_i)}$$

3 Énergie potentielle

3.1 Deux exemples connus

Énergie potentielle de pesanteur

On note que le travail du poids peut se réécrire :

$$W_{AB}(\vec{P}) = mg(z_A - z_B) = -(mgz_B - mgz_A) = -(E_{p,B} - E_{p,A}) = -\Delta E_p$$

$\rightarrow$ Pour un axe Oz orienté vers le haut, on associe au point matériel à l'altitude z une **énergie potentielle de pesanteur** telle que :

$$\boxed{E_p(z) = mgz + cste}$$

Le travail du poids est indépendant du chemin suivi, on dit que le poids est une **force conservative**.

Énergie potentielle élastique

On note que le travail de la force de rappel peut se réécrire :

$$W_{AB}(\vec{T}) = \frac{k}{2}\left(x_A^2 - x_B^2\right) = -\left(\frac{1}{2}kx_B^2 - \frac{1}{2}kx_A^2\right) = -\left(E_{p,B} - E_{p,A}\right) = -\Delta E_p$$

En choisissant une énergie potentielle élastique nulle lorsque le ressort possède sa longueur à vide l_0, on définit l'énergie potentielle élastique pour le ressort :

$$\boxed{E_p = \frac{1}{2}k\left(l - l_0\right)^2 = \frac{1}{2}kx^2}$$

avec l est la longueur du ressort, l_0 la longueur à vide et $x = l - l_0$ l'allongement.

3.2 Généralisation

S'il existe E_p fonction de la seule position telle que $\delta W = \vec{f}.\vec{dl} = -dE_p$ (ou $W_{AB} = -\Delta E_p$), la force $\vec{f}$ est dite conservative. Le travail d'une telle force ne dépend pas du chemin suivi.
On dit aussi que la force dérive d'une énergie potentielle.

Remarque : attention que tous les forces ne dérivent pas d'une énergie potentielle ; on peut citer les forces de frottement comme contre-exemple.

3.3 Autres exemples

Énergie potentielle gravitationnelle

On considère un point matériel de masse m soumis à la force gravitationnelle exercée par un astre de masse M_A situé à l'origine du système de coordonnées, r désignant la distance entre le point matériel et le centre de l'astre :

$$\vec{f}_g = -\frac{GM_Am}{r^2}\vec{u}_r$$

On peut alors évaluer le travail élémentaire sur un déplacement $\vec{dl}$:

$$\delta W = \vec{f}_g.\vec{dl} = -\frac{GM_Am}{r^2}\vec{u}_r.\vec{dl} = -\frac{GM_Am}{r^2}dr = GM_am \times d\left(\frac{1}{r}\right) = -d\left(-\frac{GM_Am}{r}\right)$$

Avec un choix d'énergie potentielle nulle à l'infini, on peut retenir pour l'expression de l'énergie potentielle gravitationnelle :

$$\boxed{E_p = -\frac{GM_Am}{r}}$$

Énergie potentielle électrostatique

Une particule de charge électrique q placée dans un potentiel électrostatique V possède une énergie potentielle :

$$\boxed{E_p = qV}$$

4 Énergie mécanique

4.1 Définition

L'énergie mécanique d'un corps, notée E_m, est la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle :

$$\boxed{E_m = E_c + E_p}$$

4.2 Théorème de l'énergie mécanique

La variation de l'énergie mécanique d'un corps est égale aux travaux des forces non conservatives s'exerçant sur ce corps :

$$\boxed{\Delta E_m = \sum_i W_{AB}\left(\vec{F}_i^{n.c.}\right)}$$

Justification : en partant du théorème de l'énergie cinétique, on sépare les forces conservatives des forces non conservatives :

$$\Delta E_c = \sum_i W_{AB}\left(\vec{F}_i\right) = \sum_i W_{AB}\left(\vec{F}_i^{c.}\right) + \sum_i W_{AB}\left(\vec{F}_i^{n.c.}\right)$$

$$\Delta E_c = -\Delta E_p + \sum_i W_{AB}\left(\vec{F}_i^{n.c.}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \Delta(E_c + E_p) = \sum_i W_{AB}\left(\vec{F}_i^{n.c.}\right)$$

4.3 Mouvement conservatif

Si $W_{AB}^{n.c.} = 0$ (pas de forces non conservatives ou forces non conservatives qui ne travaillent pas) alors l'énergie mécanique se conserve.

$$\boxed{E_m = E_c + E_p = E_m^\circ}$$

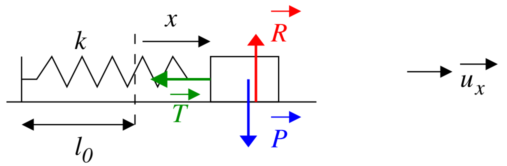
Cette égalité est appelée, « **intégrale première de l'énergie** ». La valeur de l'énergie mécanique est déterminée grâce aux conditions initiales.

Cette égalité est particulièrement intéressante pour les problèmes à 1 degré de liberté qui ne dépendent que d'une seule variable de position (une abscisse x, un angle θ,...). Ce cadre correspond à la suite de notre étude.

4.4 Exemples

Le système masse-ressort

On s'intéresse au mouvement d'un point matériel M de masse m attaché à un ressort de constante de raideur k. On néglige les frottements.



La réaction du support et le poids sont perpendiculaires au déplacement, le travail de ces forces est nul.
La seule force qui travaille est la force de rappel qui est une force conservative.

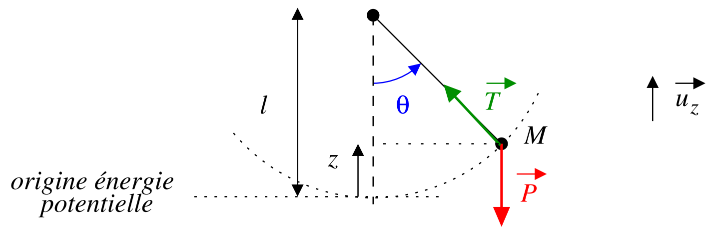
$$E_M = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E_m^\circ$$

En dérivant par rapport au temps, on retrouve l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique :

$$\frac{1}{2}m \times 2\dot{x}\ddot{x} + \frac{1}{2}k \times 2x\dot{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Le pendule simple

On considère le mouvement d'un point matériel de masse m attaché à un fil inextensible de longueur l. Le point matériel est soumis à l'action du poids et à la tension du fil, on néglige les frottements.
La tension du fil est à tout instant perpendiculaire au déplacement, son travail est nul.



$$E_M = \frac{1}{2}mv^2 + mgz = E_M^\circ$$

En exprimant la vitesse et la position à l'aide de l'angle θ, on obtient l'intégrale première de l'énergie :

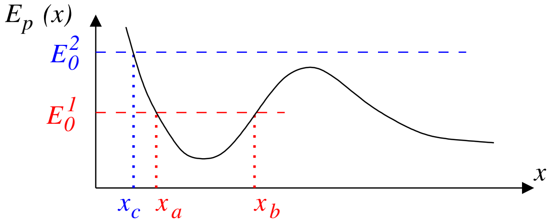
$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\left(1 - \cos\theta\right) = E_M^\circ$$

4.5 Intégrale première de l'énergie et mouvements possibles

On considère un mouvement conservatif à un degré de liberté tel que :

$$E_m = E_c + E_p(x) = E_0$$

Comme $E_c \geq 0$, alors $\forall x \; E_p(x) = E_0 - E_c \leq E_0$.
L'évolution du système correspond à un échange entre les réserves d'énergie que sont l'énergie cinétique et l'énergie potentielle ; l'inégalité $E_p(x) \leq E_0$ limite les positions accessibles.



→ Cas 1 : $E_0 = E_0^1$, **état lié**, le mouvement est borné.

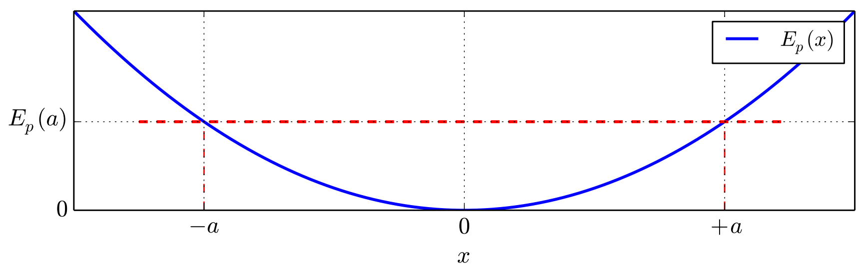
La particule abandonnée en x_a avec une énergie mécanique E_0^1 oscille entre les points x_a et x_b tels que $E_p(x_a) = E_p(x_b) = E_0^1$.

→ Cas 2 : $E_0 = E_0^2$, **état de diffusion**, le mouvement n'est pas borné.

La particule abandonnée en x_c avec une énergie mécanique E_0^2 s'échappe vers les x positifs.

5 Positions d'équilibre ; équilibres stable et instable

Premier exemple : le système masse-ressort



→ On observe un mouvement d'oscillation autour de la position $x = 0$.
→ La position $x = 0$ est caractérisée par :

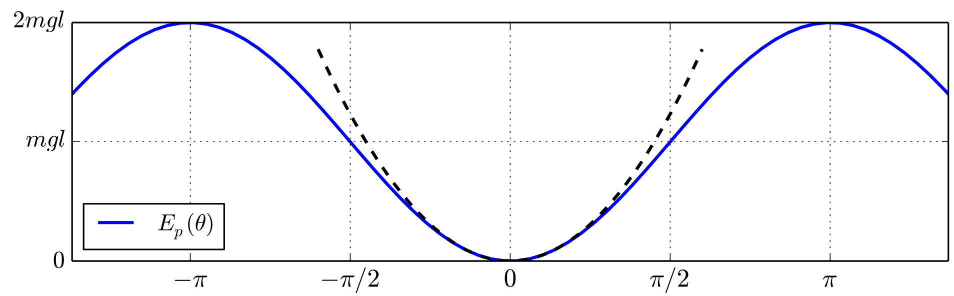
$$\frac{dE_p}{dx}(x=0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2E_p}{dx^2}(x=0) = k > 0$$

→ Cette position **d'équilibre stable** est caractérisée par un **minimum d'énergie potentielle**.

Généralisation :

$$\boxed{\begin{array}{l} \textbf{\textit{Équilibre}} : \dfrac{dE_p}{dx}(x_0) = 0 \text{ (extremum d'énergie potentielle)} \\ \textbf{\textit{Stabilité}} : \dfrac{d^2E_p}{dx^2}(x_0) > 0 \text{ (minimum d'énergie potentielle)} \end{array}}$$

Deuxième exemple : pendule simple avec $E_p(\theta) = mgl\,(1 - \cos\theta) = mgl\,f(\theta)$



Notons que $f'(\theta) = \sin\theta$ et $f''(\theta) = \cos\theta$.

→ Recherche des positions d'équilibre

$$f'(\theta) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \theta = 0 \ \text{ ou } \ \pi \quad [2\pi]$$

→ Étude de la stabilité :

→ $f''(0) = 1 > 0$; $\theta = 0$ est une position d'équilibre stable.

→ $f''(\pi) = -1$; $\theta = \pi$ est une position d'équilibre instable.

Petits mouvements autour d'une position d'équilibre stable :

Préambule : soit g une fonction d'une variable réelle deux fois dérivable ; au « voisinage » d'un point x_0, la fonction peut être approchée selon une approximation parabolique :

$$g(x) \simeq g(x_0) + (x - x_0) \times g'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} g''(x_0)$$

Au voisinage d'une position d'équilibre stable x_0, l'énergie potentielle prend la forme :

$$E_p(x) \simeq E_p(x_0) + (x - x_0)\underbrace{\frac{dE_p}{dx}(x = x_0)}_{=0} + \frac{(x - x_0)^2}{2}\underbrace{\frac{d^2E_p}{dx^2}(x = x_0)}_{=K>0}$$

En choisissant l'origine de l'énergie potentielle en x_0 ($E_p(x_0) = 0$) et en posant $X = x - x_0$, l'énergie mécanique prend la forme :

$$E_M = \frac{1}{2} m\dot{X}^2 + \frac{1}{2} K X^2$$

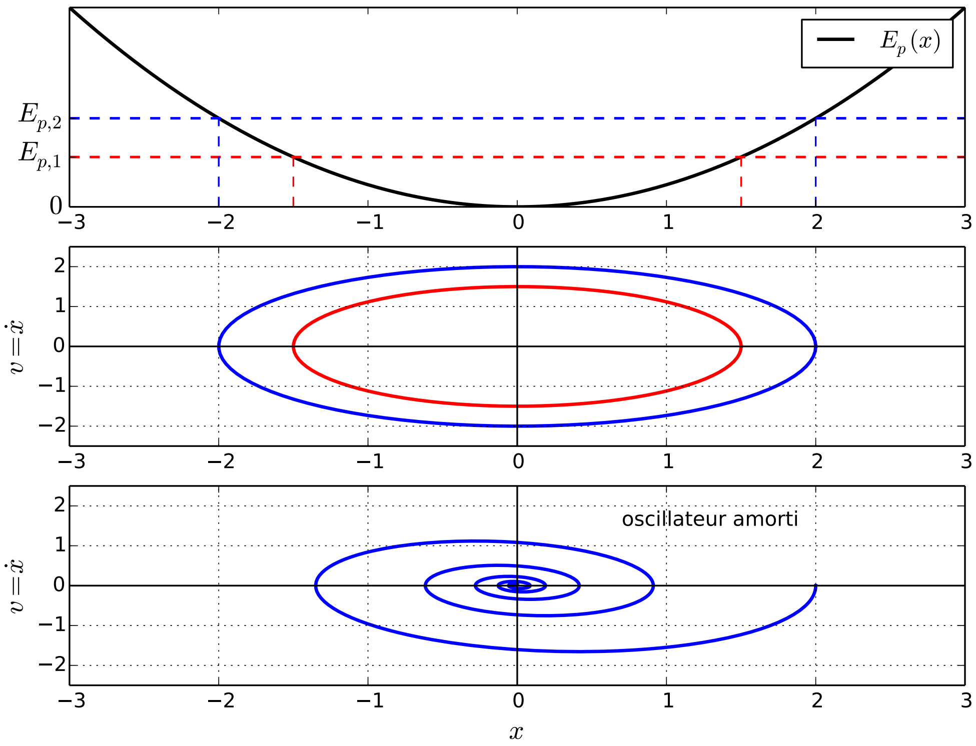
Cette énergie est celle d'un système masse-ressort : masse m, constante de raideur K. Au voisinage d'une position d'équilibre stable, le système est équivalent à un oscillateur harmonique de période $T = 2\pi\sqrt{m/K}$ avec $K = E_p''(x_0)$.

6 Portraits de phase

6.1 Principe

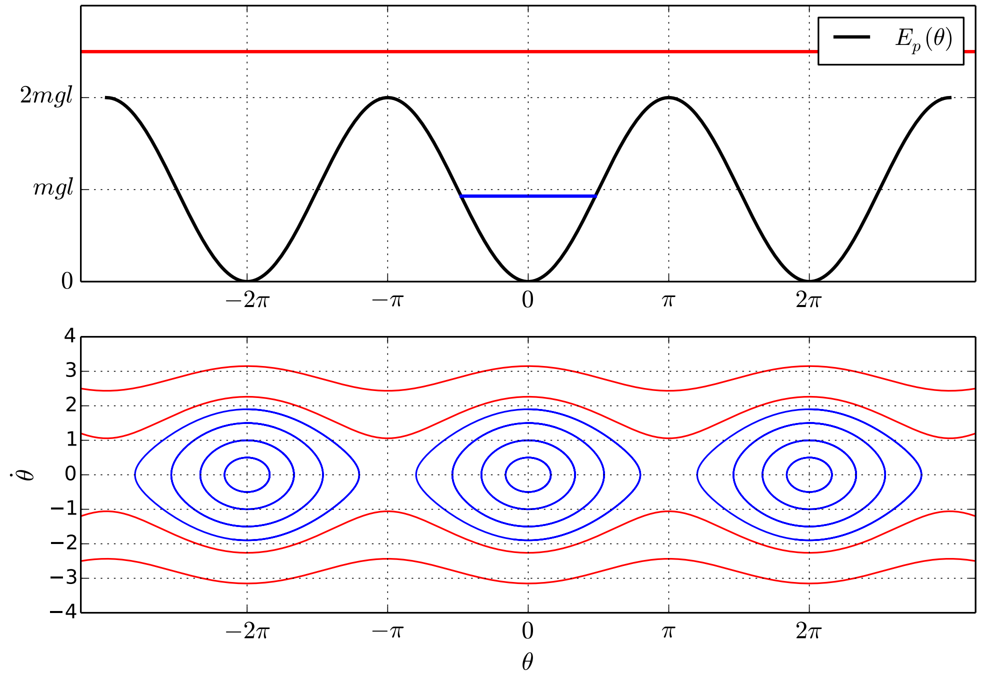
Graphiquement, l'état d'un système à un degré de liberté est représenté, à tout instant, par un point $P(t)$ de coordonnées $(x, v = \dot{x})$ dans un plan appelé **plan de phase**.
Quand le temps s'écoule, le point P décrit une courbe appelée **trajectoire de phase**.
Le portrait de phase d'un système est l'ensemble des trajectoires de phase en considérant toutes les conditions initiales réalisables.

6.2 Oscillateur harmonique



→ La trajectoire de phase est décrite dans le sens horaire ;
→ une trajectoire de phase fermée caractérise un mouvement périodique ;
→ les trajectoires de phase entourent les positions d'équilibre stable ;
→ une énergie mécanique supérieure est caractérisée par une trajectoire globalement plus éloignée de la position d'équilibre ;
→ en présence de frottements, la trajectoire vient « mourir » au niveau de la position d'équilibre stable qui représente un attracteur.

6.3 Pendule simple



→ On observe des états liés et des états de diffusion en fonction de l'énergie mécanique disponible ;
→ au voisinage d'une position d'équilibre instable, la trajectoire s'approche avant de repartir.

Capacités exigibles

→ Puissance et travail d'une force.
Reconnaître le caractère moteur ou résistant d'une force. Savoir que la puissance dépend du référentiel.

→ Loi de l'énergie cinétique et loi de la puissance cinétique dans un référentiel galiléen.

→ Énergie potentielle. Énergie mécanique.
Établir et connaître les expressions des énergies potentielles de pesanteur (champ uniforme), énergie potentielle gravitationnelle (champ créé par un astre ponctuel), énergie potentielle élastique, énergie électrostatique (champ uniforme et champ créé par une charge ponctuelle).

→ Mouvement conservatif.
Distinguer force conservative et force non conservative. Reconnaître les cas de conservation de l'énergie mécanique. Utiliser les conditions initiales.

→ Mouvement conservatif à une dimension.
Déduire d'un graphe d'énergie potentielle le comportement qualitatif : trajectoire bornée ou non, mouvement périodique, positions de vitesse nulle. Expliquer qualitativement le lien entre le profil d'énergie potentielle et le portrait de phase.

→ Positions d'équilibre. Stabilité.
Déduire d'un graphe d'énergie potentielle l'existence de positions d'équilibre, et la nature stable ou instable de ces positions.

→ Petits mouvements au voisinage d'une position d'équilibre stable, approximation locale par un puits de potentiel harmonique.
Identifier cette situation au modèle de l'oscillateur harmonique.
Approche numérique : utiliser les résultats fournis par une méthode numérique pour mettre en évidence des effets non linéaires.

→ Barrière de potentiel.
Évaluer l'énergie minimale nécessaire pour franchir la barrière.

Applications directes

AD 1. Puissance humaine.
Estimer :
- la puissance que peut développer communément un être humain ;
- la puissance limite que peut développer un sportif de haut niveau pendant un temps très court.

AD 2. Hauteur d'un lancer
On lance un objet vers le haut à la vitesse $v_0 = 2,0$ m.s^{-1}. On néglige les frottements.
Déterminer l'altitude atteinte par l'objet à l'aide d'un bilan énergétique.

AD 3. Distance de freinage.
On considère une voiture de masse m se déplaçant en ligne droite à la vitesse v.
À l'instant $t = 0$, le conducteur découvre la présence d'un obstacle et écrase la pédale de frein.
En considérant une force de frottement de norme constante égale à F, donner l'expression de la distance d parcourue durant la phase de freinage.
Comparer le résultat aux assertions disponibles dans un manuel du code de la route :
Je circule à 50 km/h, mon véhicule parcourt 14 mètres pour s'arrêter.
Je circule à 90 km/h, mon véhicule parcourt 45 mètres pour s'arrêter.