

Principes de la dynamique newtonienne

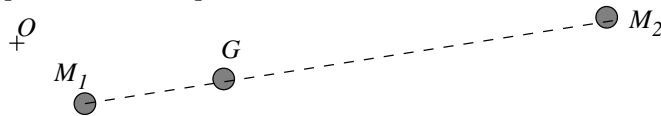
1 Quantité de mouvement

1.1 Centre de masse

Définition : on appelle, **centre de masse** (ou centre d'inertie), le barycentre G des points M_1 (masse m_1) et M_2 (masse m_2) défini par :

$$m_1 \overrightarrow{GM_1} + m_2 \overrightarrow{GM_2} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{m_1 \overrightarrow{OM_1} + m_2 \overrightarrow{OM_2}}{m_1 + m_2} \text{ avec } O \text{ quelconque.}$$

Le centre de masse se situe entre M_1 et M_2 sur la droite joignant les deux points, d'autant plus proche de M_1 que $m_1 \gg m_2$.



1.2 Quantité de mouvement

Les vitesses sont exprimées dans un référentiel \mathcal{R} donné.

Définition : on appelle, **quantité de mouvement** d'une particule de masse m et de vitesse \vec{v} , la grandeur notée \vec{p} telle que :

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Définition : la **quantité de mouvement** d'un système de points matériels est égale à la somme des quantités de mouvement des points matériels :

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$$

Propriété :

$$\vec{p} = m_1 \frac{d\overrightarrow{OM_1}}{dt} + m_2 \frac{d\overrightarrow{OM_2}}{dt} = \frac{d}{dt} (m_1 \overrightarrow{OM_1} + m_2 \overrightarrow{OM_2})$$

$$\vec{p} = \frac{d(m\overrightarrow{OG})}{dt} = m\vec{v}_G$$

Propriété : la quantité de mouvement d'un système de points est la même que celle d'un point matériel confondu avec G et où toute la masse serait concentrée.

$$\vec{p} = m\vec{v}_G$$

Le résultat précédent se généralise à un système quelconque de points. Pour la suite, on pourra assimiler un système de points ou un solide à un point matériel s'il suffit d'étudier le mouvement de son centre d'inertie pour comprendre son mouvement.

2 Les trois lois de Newton

2.1 Première loi de Newton : principe d'inertie

Dans un référentiel galiléen, un corps soumis à des forces qui se compensent a un mouvement rectiligne **et** uniforme.

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{v} = c\vec{st}e$$

Le principe d'inertie formule l'existence de référentiels particuliers, les référentiels galiléens à partir du mouvement d'un corps isolé. Très généralement :

Les référentiels galiléens sont en translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres.

2.2 Deuxième loi de Newton : principe fondamental de la dynamique

Dans un référentiel galiléen, la dérivée par rapport au temps du vecteur quantité de mouvement du système est égale à la somme des forces extérieures s'exerçant sur le système. Mathématiquement, elle se traduit par la relation :

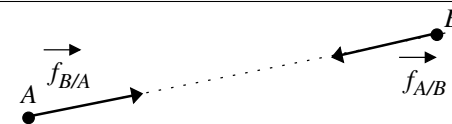
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i$$

2.3 Troisième loi de Newton : principe des actions réciproques

Si un point matériel A exerce sur un point matériel B une force $\vec{f}_{A/B}$, alors le point B exerce sur le point A une force $\vec{f}_{B/A}$ telle que :

$$\rightarrow \vec{f}_{A/B} = -\vec{f}_{B/A};$$

\rightarrow les forces ont pour direction la droite joignant les points A et B .



3 Mouvement dans le champ de pesanteur uniforme

3.1 Mouvement de chute libre

Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, on considère un corps de masse m soumis uniquement à son poids.

L'application du principe fondamental de la dynamique conduit à :

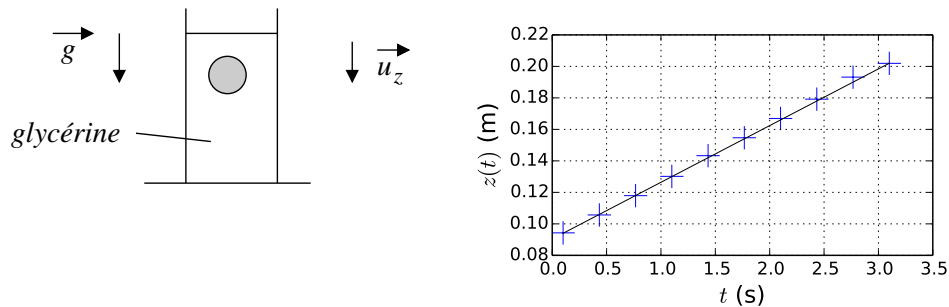
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{P} = m\vec{g} \Rightarrow m\vec{a} = m\vec{g} \Rightarrow \boxed{\vec{a} = \vec{g}}$$

Le mouvement de chute libre se caractérise par un vecteur accélération constant égal à l'accélération de pesanteur terrestre (Cf. chapitre sur la cinématique). Ceci n'est bien sûr exact que si l'on néglige les actions de l'air sur l'objet.

3.2 Chute avec frottements proportionnels à la vitesse

On s'intéresse à la chute d'une bille en caoutchouc dans un fluide visqueux, la glycérine.

Les mesures de la position de la bille au cours du temps sont reportées sur la figure de droite.



- le système étudié est **la bille** ;
- l'étude est réalisée dans le **référentiel terrestre** supposé galiléen ;
- la bille, de masse $m = 7,5$ g, est soumise à son poids \vec{P} , à la poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$ (on note $m_f = 6,64$ g la masse de fluide déplacée) et à une force de frottement proportionnelle à la vitesse $\vec{f}_f = -k\vec{v}$ avec $k = 0,244$ S.I.

Le **principe fondamental de la dynamique** s'écrit alors :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{f}_f = m\vec{g} - m_f\vec{g} - k\vec{v} \Leftrightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{k}{m}\vec{v} = \left(1 - \frac{m_f}{m}\right)\vec{g}$$

→ On pose $\tau = \frac{m}{k}$, la constante de temps associée au régime transitoire.

→ Une fois le régime permanent atteint, la vitesse tend vers une valeur limite caractérisée par :

$$\frac{k}{m}\vec{v}_{lim} = \left(1 - \frac{m_f}{m}\right)\vec{g} \Leftrightarrow \vec{v}_{lim} = \frac{m - m_f}{k}\vec{g}$$

Cette expression caractérise le fait que, pour la bille en déplacement inertiel, les forces se compensent.

L'équation différentielle prend alors la forme simplifiée :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = \frac{\vec{v}_{lim}}{\tau},$$

ou tout aussi bien en projection sur la verticale descendante : $\frac{dv_z}{dt} + \frac{v_z}{\tau} = \frac{v_{lim}}{\tau}$.

Avec une vitesse initiale supposée nulle, la solution de cette équation différentielle du premier ordre à coefficients constants est :

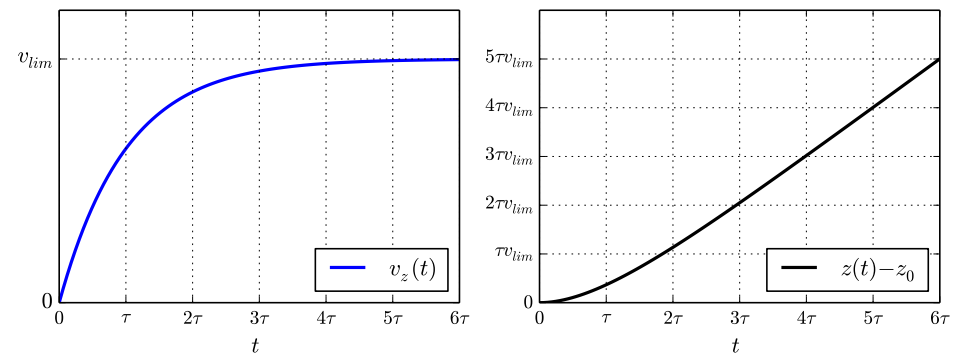
$$v_z(t) = v_{lim} (1 - e^{-t/\tau})$$

Connaissant la vitesse, on en déduit la position au cours du temps par intégration :

$$\frac{dz}{dt} = z'(t) = v_{lim} (1 - e^{-t/\tau}) \Rightarrow \int_0^t z'(t') dt' = \int_{t'=0}^t v_{lim} (1 - e^{-t'/\tau}) dt'$$

On en déduit :

$$z(t) = z_0 + v_{lim} \times t + \tau v_{lim} [e^{-t/\tau} - 1]$$



La constante de temps étant très faible par rapport à la durée de l'expérience, on n'observe expérimentalement que le régime permanent et un déplacement à vitesse constante.

La valeur de la vitesse limite déduite de l'expression théorique est cohérente avec le résultat des expériences.

3.3 Chute avec frottements proportionnels au carré de la vitesse

Cadre de l'étude

Dans le chapitre sur la cinématique, nous avons considéré le mouvement dans le champ de pesanteur terrestre en l'absence de frottements.

La trajectoire parabolique obtenue peut s'éloigner significativement du mouvement réel en particulier dans le cas des « grandes » vitesses.

Exemple historique

Historiquement cette question était d'importance pour connaître la trajectoire des boulets de canon et la portée du tir. Dans les traités de Diego Ufano (1610) et de François Blondel (1685), les descriptions suivantes sont proposées pour les trajectoires :

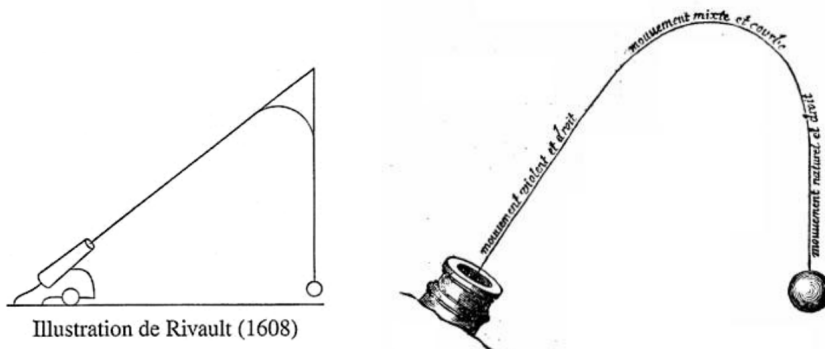


Illustration de Rivault (1608)

Dans la suite, on s'intéresse au cas des boulets de 36 livres (17,6 kg), armant les plus gros vaisseaux de ligne français et les batteries côtières, du XVIIe siècle au milieu du XIXe siècle.

Le boulet, de diamètre $d = 174,8$ mm, lancé avec une vitesse $v_0 = 450$ m/s pouvait atteindre une distance maximale de 3700 m (source Wikipedia).

Système d'équations

Dans le cas des « grandes » vitesses, on montre (Cf. cours de seconde année) que les frottements de l'air sont proportionnels au carré de la vitesse : $\vec{f} = -k v \times \vec{v}$, avec $k = C_x \rho S$, avec C_x le coefficient de traînée, de l'ordre de 0,3 pour une sphère, ρ la masse volumique de l'air et $S = \pi d^2/4$ la section frontale de la sphère.

Dans le **référentiel terrestre**, on applique le **principe fondamental de la dynamique** pour le **boulet** soumis à son poids, et à la force de frottement (la poussée d'Archimède est négligée).

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - kv\vec{v} \Leftrightarrow \boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{k}{m} v \times \vec{v} = \vec{g}}$$

Une fois le régime permanent atteint, on note l'existence d'une vitesse limite \vec{v}_{lim} qui vérifie :

$$\frac{k}{m} v_{lim} \times \vec{v}_{lim} = \vec{g} \Rightarrow \boxed{v_{lim} = \sqrt{\frac{mg}{k}}} \text{ avec } \vec{v}_{lim} = -v_{lim} \vec{u}_y$$

Avec les valeurs retenues $v_{lim} \simeq 1,4 \times 10^2$ m.s⁻¹ ; notons que l'on peut alors définir un temps caractéristique $\tau = \frac{v_{lim}}{g}$. La vitesse limite n'est pas nécessairement observée si le boulet touche le sol avant que le régime permanent ne soit atteint.

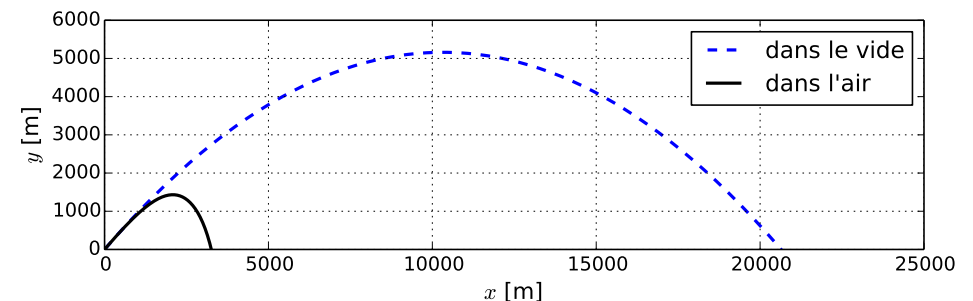
En projection selon l'horizontale (Ox) et la verticale ascendante (Oy), on obtient le jeu d'équations :

$$\frac{dv_x}{dt} + \frac{k}{m} \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \times v_x = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dv_y}{dt} + \frac{k}{m} \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \times v_y = -g$$

Il s'agit d'équations différentielles non linéaires et couplées. Dans le cas le plus général, il est nécessaire de recourir à une résolution numérique (Cf. cours d'informatique).

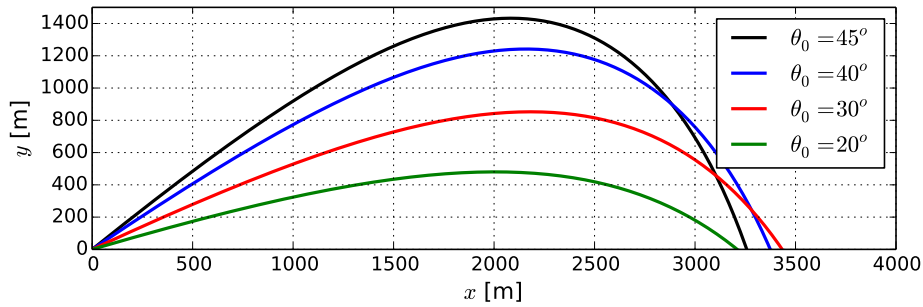
Résolution numérique

Avec un vecteur vitesse initial de norme $v_0 = 450$ m/s et faisant un angle de 45° avec l'horizontale, on obtient les courbes suivantes.

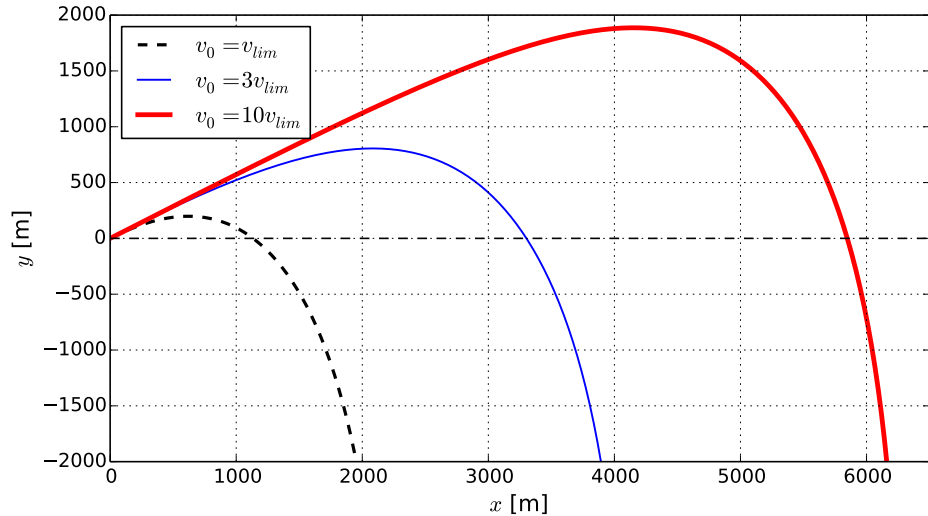


On observe une trajectoire qui s'éloigne très fortement du cas parabolique idéalisé, on obtient une portée de l'ordre de 3,0 km comme annoncé. Le modèle proposé semble donc pertinent.

Les deux graphiques suivants présentent l'influence de l'angle initial et de la vitesse initiale sur la trajectoire.



En présence de frottements, on constate que l'angle optimal de tir n'est plus de 45° .



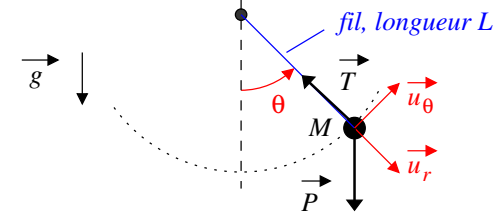
Pour ce dernier graphique, il faut considérer que le tir est effectué depuis un plateau en altitude.

Pour $v_0 \gg v_{lim}$, le poids est, dans un premier temps, négligeable devant la force de frottements, le mouvement initial est rectiligne freiné. La vitesse diminue, le mobile change de direction pour évoluer verticalement vers le bas et atteindre finalement un mouvement inertiel à la vitesse v_{lim} , les frottements compensant le poids.

4 Le pendule simple

4.1 Cadre de l'étude

On s'intéresse au mouvement d'une masse m assimilée à un point matériel attaché à un fil inextensible et sans masse. On étudie le mouvement dans le référentiel terrestre, on néglige les frottements de l'air.



4.2 Équation du mouvement

Méthode de Résolution :

- le système étudié est le solide de masse m ;
- l'étude est réalisée dans le référentiel terrestre supposé galiléen ;
- le solide est soumis à son poids \vec{P} et à la tension \vec{T} du fil.

On applique le principe fondamental de la dynamique au point matériel de masse m :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} = m\vec{g} + \vec{T}$$

On projette dans la base des coordonnées polaires $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$:

$$-mL\dot{\theta}^2 = mg \cos \theta + T_r \quad (1) \quad \text{et} \quad mL\ddot{\theta} = -mg \sin \theta \quad (2)$$

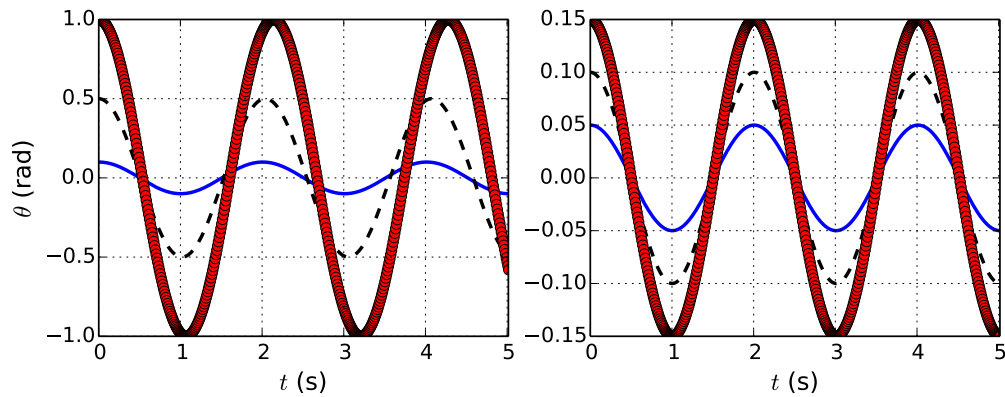
À condition de connaître $\theta(t)$, la première équation permet d'obtenir la tension du fil qui est une inconnue. La seconde équation est l'équation du mouvement que l'on peut réécrire :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 = \frac{g}{L}$$

ω_0 est la pulsation propre du système. Cette équation différentielle est non linéaire, elle nécessite une résolution de type numérique dans le cas général.

4.3 Résolution numérique

On résout l'équation différentielle par une méthode numérique avec $L = 1,0$ m. La masse est lâchée sans vitesse initiale pour différentes valeurs de l'angle initial, en radian, $\theta_0 = \{0, 1; 0, 5; 1, 0\}$, puis $\theta_0 = \{0, 05; 0, 1; 0, 15\}$.



→ L'évolution est, dans tous les cas, périodique.

→ Pour les oscillations de « grande amplitude » (courbes de gauche), on constate que la période dépend de l'amplitude des oscillations.

→ Pour les oscillations de « faible amplitude » (courbes de droite), on constate que la période ne dépend pas de l'amplitude des oscillations. On parle **d'isochronisme des petites oscillations**, la période étant égale à la période propre $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

4.4 Cas des petites oscillations

Linéarisation et résolution algébrique

Pour des oscillations de « faible amplitude », $\theta \ll 1$ rad, il est possible d'effectuer l'approximation $\sin \theta \simeq \theta$. L'équation différentielle prend alors la forme simplifiée :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

On reconnaît l'équation de l'oscillateur harmonique ; avec les conditions initiales $\theta(t=0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(t=0) = 0$, on en déduit

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t)$$

Pour les oscillations de « faible amplitude », on retrouve l'isochronisme des petites oscillations à la période propre $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$.

Portrait de phase

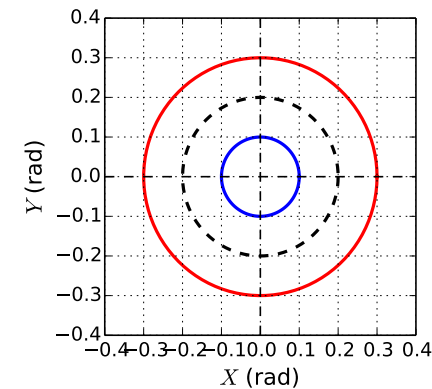
Le portrait de phase consiste à représenter $\dot{\theta}$ en fonction de θ . Pour obtenir la relation entre ces deux grandeurs, on multiplie l'équation différentielle par $\dot{\theta}$ selon :

$$\ddot{\theta} \times \dot{\theta} = -\omega_0^2 \theta \times \dot{\theta} \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\theta}^2}{2} \right) = -\omega_0^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\theta^2}{2} \right) \Leftrightarrow \frac{d}{dt} (\dot{\theta}^2 + \omega_0^2 \theta^2) = 0$$

La grandeur $\dot{\theta}^2 + \omega_0^2 \theta^2$, appelée **intégrale première du mouvement**, est une constante dont la valeur est déterminée à l'aide des conditions initiales ; dans le cas présent avec $\dot{\theta}(0) = 0$ et $\theta(0) = \theta_0$:

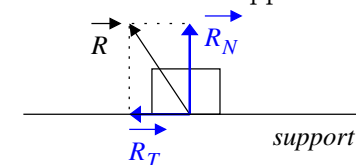
$$\dot{\theta}^2 + \omega_0^2 \theta^2 = \omega_0^2 \theta_0^2 \Leftrightarrow \left(\frac{\dot{\theta}}{\omega_0} \right)^2 + \theta^2 = \theta_0^2$$

Pour les grandeurs $Y = \left(\frac{\dot{\theta}}{\omega_0} \right)$ et $X = \theta$, on constate que la trajectoire de phase est un cercle centré sur l'origine et de rayon θ_0 . Les trajectoires de phase pour $\theta_0 = \{0, 1; 0, 2; 0, 3\}$ (en rad) sont représentées ci-dessous.



5 Lois de Coulomb. Frottement de glissement

On considère un objet en contact avec un support.



On décompose la force de contact exercée par le support sur l'objet en deux composantes :

$$\vec{R} = \vec{R}_N + \vec{R}_T$$

→ \vec{R}_N est la composante normale à la surface du support, elle s'oppose à la pénétration de l'objet dans le support, elle est orientée du support vers le système.

→ \vec{R}_T est la composante tangentielle, tangente à la surface du support. Cette composante modélise les forces de frottement solide.

Deux situations sont à distinguer :

→ En l'absence de glissement :

$$\|\vec{R}_T\| < \mu_s \|\vec{R}_N\| \quad \text{avec } \mu_s \text{ le coefficient de frottement statique}$$

→ En présence de glissement :

$$\|\vec{R}_T\| = \mu_g \|\vec{R}_N\| \quad \text{avec } \mu_g \text{ le coefficient de frottement dynamique}$$

et \vec{R}_T opposé au vecteur vitesse

On effectue généralement l'approximation $\mu_s = \mu_g = \mu_0$. En l'absence de frottements $\mu_s = \mu_g = 0$, la force de réaction se limite à sa composante normale.

Capacités exigibles

→ Forces. Principe des actions réciproques.

Établir un bilan des forces sur un système, ou plusieurs systèmes en interaction et en rendre compte sur une figure.

→ Quantité de mouvement.

Établir l'expression de la quantité de mouvement d'un système restreint au cas de deux points sous la forme $\vec{p} = m\vec{v}_G$.

→ Référentiel galiléen. Principe de l'inertie.

Décrire le mouvement relatif de deux référentiels galiléens.

→ Loi de la quantité de mouvement.

Déterminer les équations du mouvement d'un point matériel ou du centre d'inertie d'un système fermé.

→ Mouvement dans le champ de pesanteur uniforme.

Mettre en équation le mouvement sans frottement et le caractériser comme un mouvement à vecteur-accélération constant.

→ Influence de la résistance de l'air.

Approche numérique : Prendre en compte la traînée pour modéliser une situation réelle.

Approche numérique : Exploiter une équation différentielle sans la résoudre analytiquement : analyse en ordres de grandeur, détermination de la vitesse limite, utilisation des résultats fournis par un logiciel d'intégration numérique.

→ Pendule simple.

Établir l'équation du mouvement du pendule simple.

Justifier l'analogie avec l'oscillateur harmonique dans le cadre de l'approximation linéaire.

Établir l'équation du portrait de phase (intégrale première) dans ce cadre et le tracer.

→ Lois de Coulomb du frottement de glissement.

Exploiter les lois de Coulomb fournies dans les trois situations : équilibre, mise en mouvement, freinage.

Formuler une hypothèse (quant au glissement ou non) et la valider.

Applications directes

AD 1. Lancer avec frottement fluide.

On lance une balle vers le haut avec une vitesse initiale de norme v_0 . On suppose que la balle est soumise en plus de son poids à une force de frottement fluide de la forme $\vec{f} = -k\vec{v}$.

Donner l'expression de l'instant t auquel la bille atteint son altitude maximale.

AD 2. Lancer avec frottement solide.

Sur une table horizontale, on lance un palet de masse $m = 100$ g avec une vitesse initiale de norme $v_0 = 2,0$ m.s⁻¹.

On suppose que l'interaction table-palet est caractérisée par un coefficient de frottement solide $\mu = 0,2$.

Déterminer l'instant auquel le palet s'arrête ainsi que la distance parcourue.

AD 3. Détermination d'un coefficient de frottement solide.

On considère un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale. Un livre est posé sur le plan incliné.

On augmente progressivement la valeur de l'angle α et on constate que le livre commence à glisser pour un angle $\alpha_c = 20^\circ$. Donner la valeur numérique du coefficient de frottement μ_0 .