Lycée Naval, Sup 2.
MÉCANIQUE 1. 1.1. Description et paramétrage du mouvement d'un point
1.2. Description du mouvement d'un solide dans deux cas particuliers

Cinématique du point et du solide

1 Espace et temps, référentiel d'observation

Le mouvement d'un corps est étudié dans un <u>**référentiel**</u>, objet pris comme référence et par rapport auquel on étudie ce mouvement.

Le référentiel est muni d'un repère d'espace, un système de coordonnées, et de temps, une horloge.

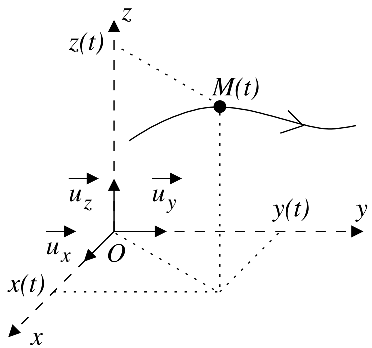
En mécanique classique, les mesures de durées et de longueurs sont des absolus, ainsi une horloge bat au même rythme pour le chef de gare et pour le contrôleur dans le train.

2 Description et paramétrage du mouvement d'un point matériel

2.1 Coordonnées cartésiennes

Repérage d'un point, vecteur position

On choisit un repère muni d'une origine O et d'une base orthonormée $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ définie comme suit :



Le vecteur position est alors défini selon :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

ou, tout aussi bien : $\boxed{\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y + z(t)\vec{u}_z}$

Vecteur vitesse

Le vecteur vitesse est défini comme la dérivée du vecteur position par rapport au temps :

$$\boxed{\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}(t)}{\mathrm{d}t}}$$

En coordonnées cartésiennes, le vecteur vitesse a pour expression :

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}$$

<u>Justification</u> : ce résultat est obtenu en dérivant le vecteur position terme à terme sachant que les vecteurs de la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ sont fixes donc indépendants du temps :

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\left[x(t)\vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y + z(t)\vec{u}_z\right] \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\vec{u}_x + \dot{y}(t)\vec{u}_y + \dot{z}(t)\vec{u}_z}$$

Vecteur accélération

Le vecteur accélération est défini comme la dérivée du vecteur vitesse par rapport au temps :

$$\boxed{\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}(t)}{\mathrm{d}t^2}}$$

En coordonnées cartésiennes, le vecteur accélération a pour expression :

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{v}_x(t) \\ \dot{v}_y(t) \\ \dot{v}_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix}$$

Ce résultat s'obtient là encore immédiatement en dérivant terme à terme le vecteur vitesse par rapport au temps.

Exemple

On considère un mouvement pour lequel le vecteur accélération est un vecteur constant dirigé vers le bas et de norme $g = 10$ m.s^{-2}. On suppose que l'objet est initialement à l'origine du système de coordonnées et que son vecteur vitesse

initial est dirigé vers le haut avec une norme $v_0 = 5,0$ m.s^{-1}.
On souhaite caractériser le sommet de la trajectoire (instant, hauteur atteinte).

La réponse à cette question passe par la détermination de $z(t)$ qui va être obtenu par intégration du vecteur accélération.

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

Le vecteur vitesse initial étant lui-même selon Oz, on peut se limiter à l'étude des composantes selon cette unique direction. Par intégration, on obtient :

$$v_z(t) = -gt + cste$$

Avec $v_z(0) = v_0$, on en déduit : $v_z(t) = -gt + v_0$, on intègre une seconde fois pour en déduire :

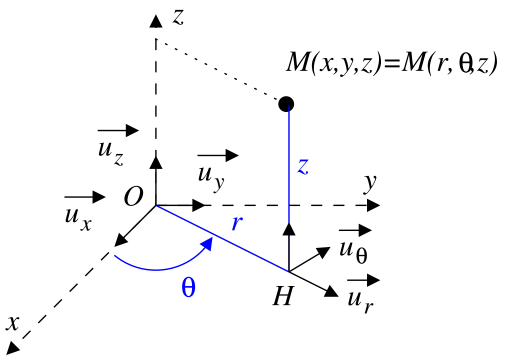
$$z(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t$$

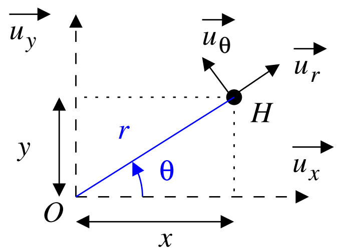
Le sommet est atteint à l'instant $t_s = \dfrac{v_0}{g}$, la hauteur atteinte étant alors $h = \dfrac{v_0^2}{2g}$.

2.2 Coordonnées cylindriques

Repérage d'un point, vecteur position

On choisit un repère muni d'une origine O et d'une base orthonormée $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ définie comme suit :





Pour décrire une fois l'ensemble des points de l'espace, les coordonnées cylindriques doivent varier dans les limites suivantes :

$$0 \leq r < +\infty \quad ; \quad 0 \leq \theta < 2\pi \quad ; \quad -\infty < z < +\infty$$

Le vecteur position est alors défini selon :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z}$$

La base des coordonnées cylindriques change avec le point avec en particulier :

$$\vec{u}_r = \cos\theta\vec{u}_x + \sin\theta\vec{u}_y \quad \text{et} \quad \vec{u}_\theta = -\sin\theta\vec{u}_x + \cos\theta\vec{u}_y$$

On peut enfin établir la correspondance suivante entre les coordonnées :

$$x = r\cos\theta \quad \text{et} \quad y = r\sin\theta$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad \tan(\theta) = y/x$$

Vecteur vitesse

En coordonnées cylindriques, le vecteur vitesse a pour expression :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z}$$

<u>Justification</u> :

Les vecteurs de base changent maintenant avec le point, on commence par établir l'expression de leur dérivée par rapport au temps :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{u}_r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{u}_r}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta} \times \frac{\mathrm{d}\vec{u}_r}{\mathrm{d}\theta} = \dot{\theta}\left[\frac{\mathrm{d}\cos\theta}{\mathrm{d}\theta}\vec{u}_x + \frac{\mathrm{d}\sin\theta}{\mathrm{d}\theta}\vec{u}_y\right] = \dot{\theta}\left[-\sin\theta\vec{u}_x + \cos\theta\vec{u}_y\right]$$

On en déduit : $\dfrac{\mathrm{d}\vec{u}_r}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta$ et $\dfrac{\mathrm{d}\vec{u}_\theta}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\vec{u}_r$

On peut alors déterminer la dérivée du vecteur position :

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[r\vec{u}_r + z\vec{u}_z\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\vec{u}_r) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(z\vec{u}_z) = \dot{r}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt} + \dot{z}\vec{u}_z + z\frac{d\vec{u}_z}{dt}$$
$$\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z$$

Vecteur accélération

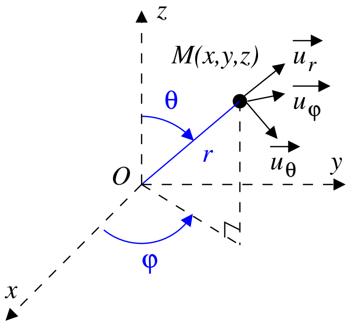
En coordonnées cylindriques, le vecteur accélération a pour expression :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_r \\ a_\theta \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\vec{a} = \left[\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right]\vec{u}_r + \left[2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right]\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{u}_z}$$

2.3 Coordonnées sphériques

Repérage d'un point, vecteur position

On choisit un repère muni d'une origine O et d'une base orthonormée $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ définie comme suit :



Pour décrire une fois l'ensemble des points de l'espace, les coordonnées sphériques doivent varier dans les limites suivantes :

$$0 \leq r < +\infty \quad ; \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad ; \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

Le vecteur position est alors défini selon :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r}$$

Vecteur vitesse

En coordonnées sphériques, le vecteur vitesse a pour expression :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ r\sin\theta\dot{\varphi} \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\sin\theta\dot{\varphi}\vec{u}_\varphi}$$

Justification :

→ Lorsque r varie de dr à θ et φ fixés, le déplacement a lieu selon $\vec{u}_r$ et vaut :
$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\vec{u}_r$$

→ Lorsque θ varie de dθ à r et φ fixés, le déplacement a lieu selon $\vec{u}_\theta$ le long d'un cercle de rayon r et vaut :
$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = r\mathrm{d}\theta\vec{u}_\theta$$

→ Lorsque φ varie de dφ à r et θ fixés, le déplacement a lieu selon $\vec{u}_\varphi$ le long d'un cercle de rayon $r\sin\theta$ et vaut :
$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = r\sin\theta\mathrm{d}\varphi\vec{u}_\varphi$$

La base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ étant une base orthonormée, le déplacement le plus général est la combinaison de ces trois expressions :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\vec{u}_r + r\mathrm{d}\theta\vec{u}_\theta + r\sin\theta\mathrm{d}\varphi\vec{u}_\varphi$$

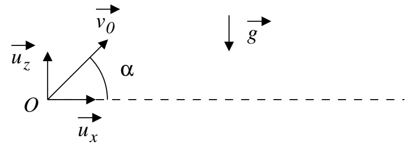
Ce déplacement élémentaire effectué en une durée dt correspond à une vitesse :

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\vec{u}_r + r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{u}_\theta + r\sin\theta\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\vec{u}_\varphi$$

2.4 Exemples de mouvements

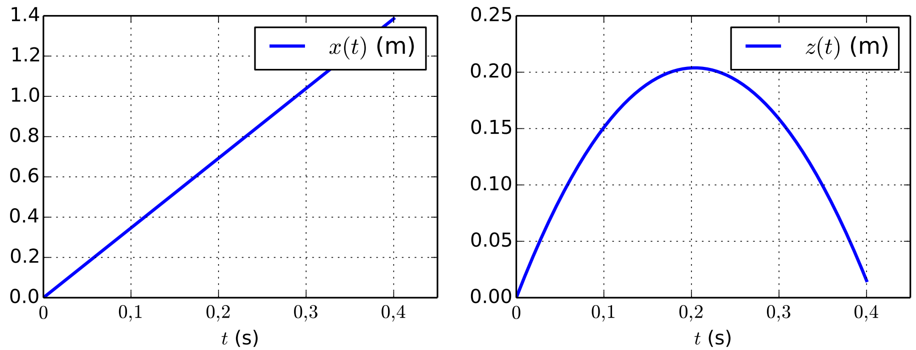
Mouvement de vecteur-accélération constant

On considère un mobile initialement à l'origine du système de coordonnées faisant un angle α avec l'horizontale. On suppose que le vecteur accélération est constant tel que $\vec{a} = \vec{g} = -g\vec{u}_z$.



Le mouvement s'effectue dans le plan xOz. Partant du vecteur accélération, en tenant compte des conditions initiales, on intègre deux fois pour obtenir le vecteur vitesse puis le vecteur position :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x = 0 \\ a_z = -g \end{pmatrix} ; \vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} = v_0\cos\alpha \\ \dot{z} = -gt + v_0\sin\alpha \end{pmatrix} ; \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x(t) = v_0\cos\alpha \times t \\ z(t) = -\dfrac{gt^2}{2} + v_0\sin\alpha \times t \end{pmatrix}$$

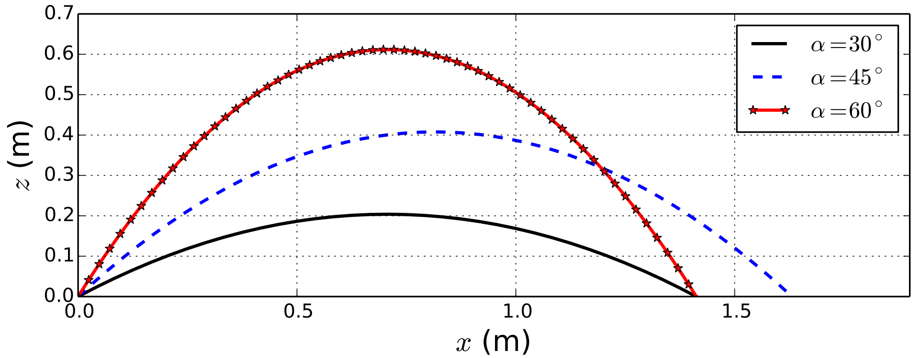


Les courbes ont été tracées pour $v_0 = 4,0$ m.s^{-1} et $\alpha = 30°$. L'accélération horizontale étant nulle, le mouvement est inertiel selon l'axe Ox.

Connaissant les équations horaires $x(t)$ et $z(t)$, on en déduit l'équation de la trajectoire. En effet, de la première équation on tire $t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$, que l'on reporte dans la seconde :

$$z(x) = -\frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha} + \tan\alpha \times x$$

L'équation obtenue est celle d'une parabole : la trajectoire est parabolique. On remarque que le vecteur accélération est dirigé vers l'intérieur de la concavité de la trajectoire.

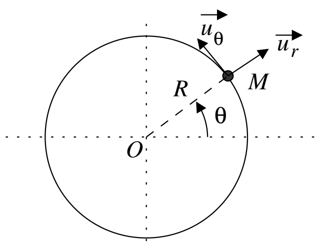


On peut alors montrer que :

- la portée d de la trajectoire est donnée par $d = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$;
- le sommet de la trajectoire a pour coordonnées : $\left(\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}, \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}\right)$.

Mouvement circulaire

On considère un mobile assujetti à se déplacer sur un cercle de centre O et de rayon R. Naturellement, le bon paramétrage consiste ici à utiliser les coordonnées polaires.



<u>*Vecteur position*</u> : $\overrightarrow{OM} = R\vec{u}_r$

<u>*Vecteur vitesse*</u> : $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta$

$r(t) = R$, il n'y a pas de déplacement radial, la seule composante non nulle du vecteur vitesse est la composante orthoradiale.

On définit $\omega = \dot{\theta}$ la **vitesse angulaire**.

<u>*Vecteur accélération*</u> : $\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{u}_r + R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$

Cas particulier : mouvement circulaire <u>uniforme</u>

Un mouvement est uniforme si la **norme** du vecteur vitesse est constante. Dans le cas du mouvement circulaire, cela implique $\dot{\theta}(t) = \omega_0 = cste$

Le vecteur accélération devient $\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{u}_r = -R\omega_0^2\vec{u}_r = -\frac{v^2}{R}\vec{u}_r$.

Le vecteur accélération est radial et dirigé vers le centre de la trajectoire.

La conservation de la norme du vecteur vitesse n'entraîne pas la nullité du vecteur accélération !

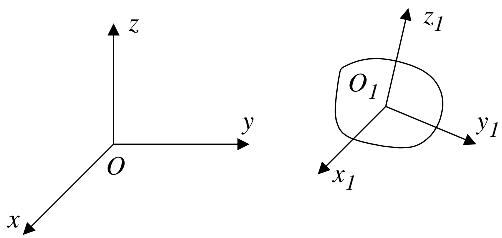
3 Description du mouvement d'un solide

3.1 Définition

Un **solide** est un système matériel indéformable dont les points restent à distance constante les uns des autres.

3.2 Repérage d'un solide dans l'espace

On considère un référentiel auquel on associe un repère d'espace orthonormé (O, x, y, z). On associe au solide un repère d'espace (O_1, x_1, y_1, z_1) avec O_1 un point de ce solide.



Pour repérer le solide dans l'espace, il faut se donner 6 paramètres :

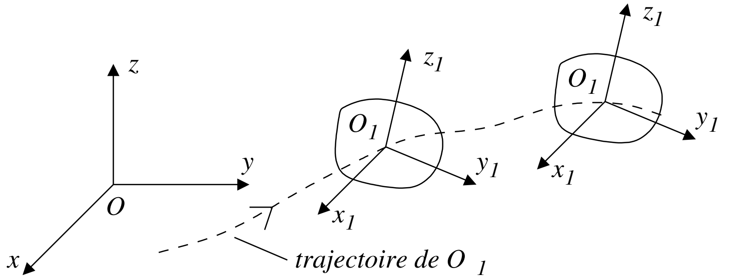
- les trois coordonnées d'espace de O_1 dans le repère (O, x, y, z) ;

— trois angles qui définissent les axes du repère lié au solide par rapport au référentiel d'étude.

3.3 Mouvement de translation

Définition

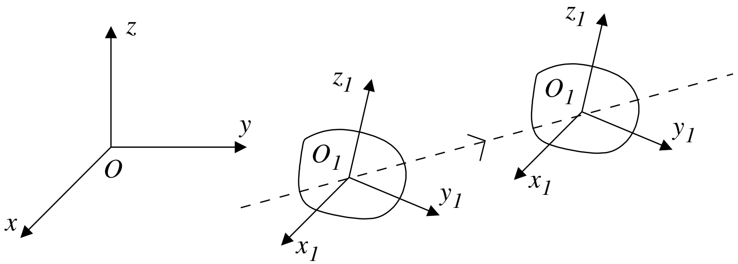
Un solide est en **translation** lorsque les directions du repère liées au solide sont fixes par rapport au référentiel d'étude.



Conséquence : tous les points d'un solide en translation ont le même mouvement.

Translation rectiligne

La translation est une translation rectiligne si le mouvement de O_1 est un mouvement rectiligne.

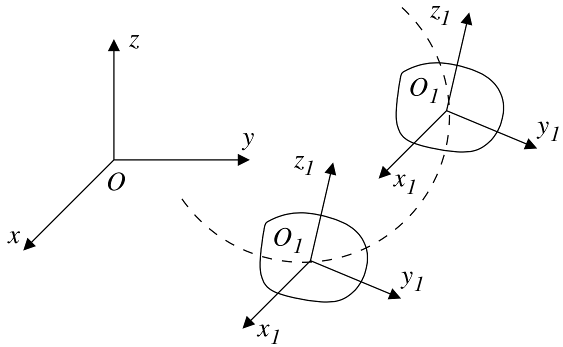


Exemple : mouvement d'un ascenseur par rapport au référentiel terrestre.

Translation circulaire

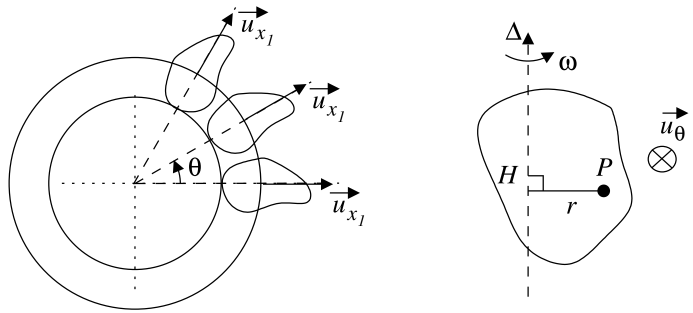
La translation est une translation circulaire si le mouvement de O_1 est un mouvement circulaire.

Remarque : chaque point du solide décrit un arc de cercle de même rayon mais de centre différent.



3.4 Solide en rotation autour d'un axe fixe

Un solide est en rotation autour d'un axe fixe Δ dans le référentiel d'étude, s'il existe une unique droite Δ à la fois fixe par rapport au solide et au référentiel d'étude.



Le mouvement d'un point P du solide est un mouvement circulaire qui s'effectue dans un plan perpendiculaire à Δ :

— de centre H le projeté orthogonal de P sur l'axe Δ ;

— de rayon $r = HP$;

— à la vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$ égale à celle du solide autour de l'axe Δ ;

Ce qui donne pour la vitesse du point P : $\boxed{\vec{v}_P = r\omega\vec{u}_\theta}$.

Capacités exigibles

Description et paramétrage du mouvement d'un point

→ Espace et temps classiques. Référentiel d'observation. Caractère relatif du mouvement.

→ Description d'un mouvement. Vecteur-position, vecteur-vitesse, vecteur-accélération.

→ Systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.

Établir les expressions des composantes du vecteur-position, du vecteur-vitesse et du vecteur-accélération dans le seul cas des coordonnées cartésiennes et cylindriques.
Exprimer à partir d'un schéma le déplacement élémentaire dans les différents systèmes de coordonnées, construire le trièdre local associé et en déduire les composantes du vecteur-vitesse en coordonnées cartésiennes et cylindriques.
Choisir un système de coordonnées adapté au problème posé.

→ Exemple 1 : mouvement de vecteur-accélération constant
Exprimer la vitesse et la position en fonction du temps. Obtenir la trajectoire en coordonnées cartésiennes.

→ Exemple 2 : mouvement circulaire uniforme et non uniforme
Exprimer les composantes du vecteur-position, du vecteur-vitesse et du vecteur-accélération en coordonnées polaires planes.
Identifier les liens entre les composantes du vecteur-accélération, la courbure de la trajectoire, la norme du vecteur-vitesse et sa variation temporelle. Situer qualitativement la direction du vecteur-accélération dans la concavité d'une trajectoire plane.

Description du mouvement d'un solide dans deux cas particuliers

→ Définition d'un solide.

→ Translation.
Reconnaître et décrire une translation rectiligne, une translation circulaire.

→ Rotation autour d'un axe fixe.
Décrire la trajectoire d'un point quelconque du solide et exprimer sa vitesse en fonction de sa distance à l'axe et de la vitesse angulaire.

Applications directes :

AD 1. Coordonnées cartésiennes.
Un point M est décrit par les coordonnées cartésiennes suivantes :
$(x(t),\, y(t),\, z(t))=(t,\, 3t^2,\, 0)$

1. Déterminer les expressions du vecteur vitesse et du vecteur accélération.
2. Quelle est la nature de la trajectoire ?

AD 2. Coordonnées cylindriques.
Déterminer les coordonnées cylindriques du point M de coordonnées cartésiennes (2,2,1).

AD 3. Coordonnées cylindriques.
Un point M est repéré par ses coordonnées cylindriques (r,θ,z). Décrire le lieu des points vérifiant :

1. $r =$constante ?
2. $\theta =$constante ?
3. $z =$constante ?

AD 4. Trajectoires rectilignes.
Un automobiliste A_1 démarre à l'instant $t = 0$ au point d'origine O ; il se déplace sur l'axe (Ox) avec une accélération constante $a_1 = 3,0$ m.s^{-2}. À l'instant initial, un second automobiliste A_2 se trouve à la position $x_2(0) = D = 40$ m ; ce second automobiliste se déplace sur le même axe, vers la droite, avec une vitesse constante $v_2 =$40 km.h^{-1}.

1. Exprimer les équations horaires $x_1(t)$ et $x_2(t)$ des deux automobilistes en fonction de D, a_1 et v_2.
2. À quelle date t_0 les deux automobilistes se rencontrent-ils ? Donner l'expression littérale de t_0 et sa valeur numérique.

AD 5. Mouvement ralenti.
Un mobile se déplace sur un cercle de rayon R à la vitesse ω_0 constante.
À partir de $t = 0$, le mobile décélère de telle sorte que $\dfrac{d\omega}{dt} = -\alpha$, avec α une constante positive.
Déterminer l'instant d'arrêt et la distance parcourue entre le début du freinage et l'arrêt complet.