Lycée Naval, Sup 2.
Signaux Physiques. 04. Introduction au monde quantique.

Introduction au monde quantique

1 Dualité onde-corpscule

1.1 Dualité onde-corpuscule pour la lumière

Description

→ Les phénomènes d'interférence et de diffraction, étudiés dès le XIX^e siècle pour la lumière, trahissent le caractère **ondulatoire** de la lumière. On parle d'onde lumineuse ou plus généralement d'onde électromagnétique.

Dans la vision **ondulatoire**, la lumière est caractérisée par une longueur d'onde λ. Dans le vide, la longueur d'onde, la célérité c de la lumière et la fréquence ν sont reliées par :

$$\lambda = c/\nu$$

→ Des phénomènes découverts au XX^e siècle ne peuvent être interprétés que si l'on admet l'existence de grains de matière appelés **photons**. La lumière a alors un caractère **corpusculaire**.

Le photon a une masse nulle et se déplace à la célérité c dans le vide.
Le photon associé à une lumière de fréquence ν et de longueur d'onde λ possède l'énergie :

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

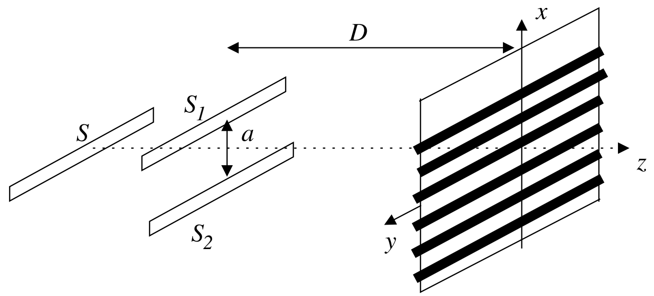
h est la constante de Planck, $h = 6,626 \times 10^{-34}$ J.s.

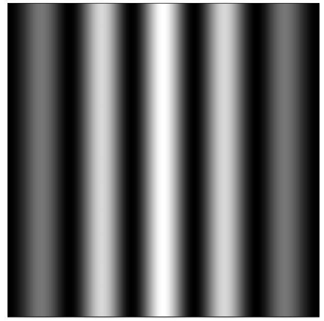
La lumière n'est pas soit une onde soit un corpuscule, elle est les deux à la fois : on parle de **dualité onde-corpuscule**.

Ainsi, à une onde lumineuse rouge telle que $\lambda = 632$ nm, on peut associer des photons d'énergie $E = 3,15 \times 10^{-19}$ J $= 1,97$ eV.

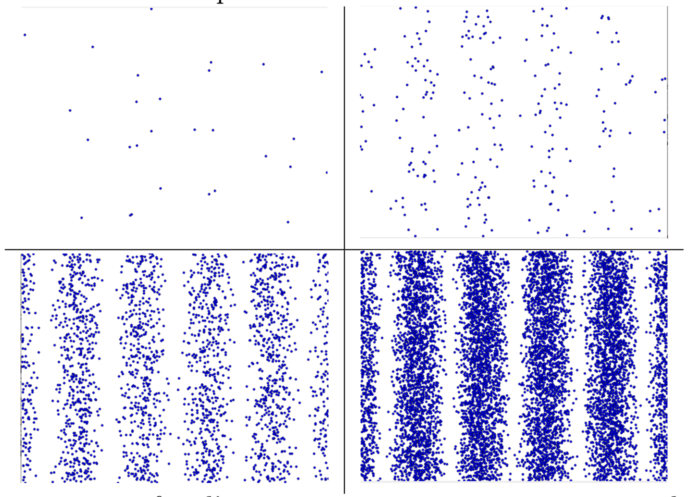
Expérience des fentes d'Young

→ Interférences à deux ondes : une source quasi-monochromatique éclaire un écran opaque percé de deux fentes rectilignes très fines et identiques. Sur un écran parallèle à l'écran opaque on observe des franges rectilignes.





→ Interférences photon par photon : si on réduit l'intensité lumineuse, les photons peuvent être envoyés un par un sur le dispositif.
La représentation ci-dessous (issue d'une simulation numérique) montre l'écran d'observation au cours du temps.



- les impacts successifs à l'écran suggèrent un aspect corpusculaire ;
- un impact individuel se réalise en une position aléatoire, les impacts successifs dessinent, quant à eux, au fur et à mesure, les franges d'interférences prédites par la théorie ondulatoire

1.2 Dualité onde-corpuscule pour la matière

L'onde de matière

Symétriquement, on associe à toute particule de matière (proton, électron, neutron,...) un comportement ondulatoire.

On appelle $\vec{p} = m\vec{v}$ la quantité de mouvement d'une particule de masse m et de vitesse $\vec{v}$.

Relation de Louis de Broglie (1923) : à toute particule matérielle, on associe une onde de matière de longueur d'onde :

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

avec p la quantité de mouvement de la particule.

Quelques ordres de grandeur

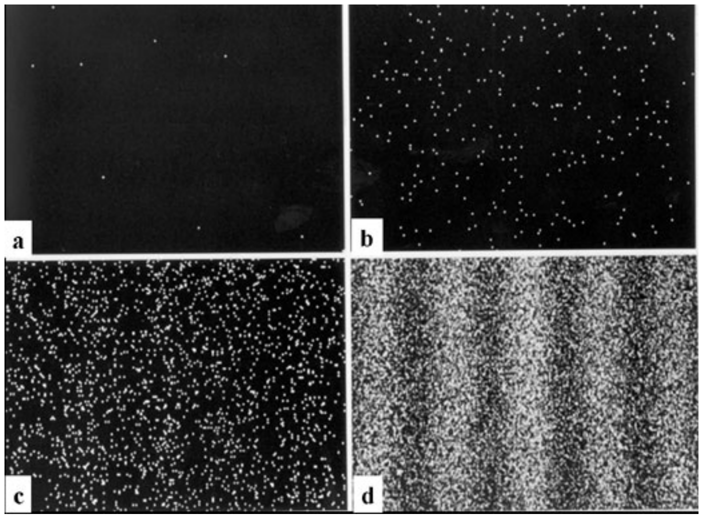
→ Pour un marcheur, la longueur d'onde de de Broglie est de l'ordre de 10^{-36} m. Cette valeur, ridiculement « petite », explique que l'homme, comme tout objet macroscopique, vérifie les lois de la mécanique classique, un quelconque caractère ondulatoire est impossible à mettre en évidence.

→ Pour un électron tournant autour du proton dans un atome d'hydrogène à la vitesse $v \simeq 3 \times 10^6$ m.s^{-1}, on obtient $\lambda = 2,4 \times 10^{-10}$ m. Cette longueur comparable au rayon de Bohr (taille du système atomique) explique que le caractère ondulatoire de l'électron peut être mis en évidence.

Expérience

En 1989, le chercheur japonais A. Tonomura et son équipe ont reproduit avec des électrons une expérience similaire à celles des fentes d'Young.

Les photographies montrent la construction progressive de la figure d'interférences, comme dans le cas de l'expérience d'interférences photon par photon.



2 Fonction d'onde et probabilité de détection

→ La description complète de l'état d'une particule se fait à l'aide d'une fonction d'onde $\psi(x, y, z, t)$, fonction de l'espace et du temps, à valeur *a priori* complexe.

→ La probabilité élémentaire dP de trouver la particule dans un volume élémentaire $d\tau = dxdydz$, autour d'un point $M(x, y, z)$, est donnée par :

$$\boxed{dP = |\psi|^2 \, d\tau}$$

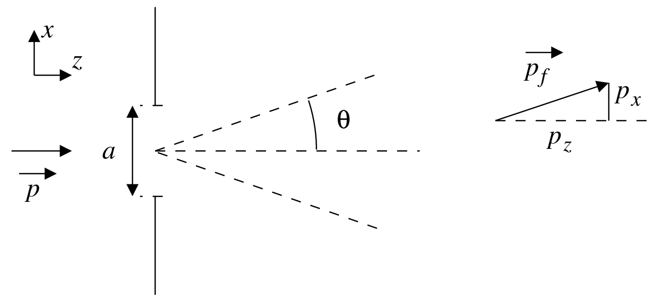
La particule étant avec certitude dans tout l'espace : $\iiint_{\text{espace}} |\psi|^2 \, d\tau = 1$

→ Cette description probabiliste est inhérente à la mécanique quantique. On ne peut prédire la trajectoire du corpuscule mais seulement donner une probabilité de présence en un endroit de l'espace.

3 Inégalité de Heisenberg spatiale

3.1 Indétermination quantique : exemple

On considère l'exemple de la diffraction d'une onde lumineuse par une fente de largeur a. Le faisceau est diffracté dans un cône de demi-angle θ vérifiant $\sin\theta = \dfrac{\lambda}{a}$.



En terme ondulatoire, la réduction de la taille de la fente entraîne une augmentation de l'ouverture angulaire du faisceau.

En terme corpusculaire, le photon de quantité de mouvement initiale $\vec{p} = p\vec{u}_z$ émerge dans le cône de demi-angle θ ; il existe donc, **pour ce photon individuel**, une **indétermination** sur la composante selon Ox de sa quantité de mouvement de l'ordre de $\Delta p_x = p \times \sin\theta$.

Le photon traversant la fente, il est localisé spatialement avec une indétermination

$\Delta x \sim a$. On constate que :

$$\Delta p_x \times \Delta x = p \times \sin\theta \times a = \frac{h}{\lambda} \times \frac{\lambda}{a} \times a \quad \Rightarrow \quad \Delta p_x \times \Delta x \simeq h$$

En localisant la particule à l'aide d'une fente, on introduit une dispersion sur sa quantité de mouvement.

3.2 Principe d'indétermination de Heisenberg

Énoncé

Les indéterminations Δx et Δp_x sur la position et la quantité de mouvement selon un axe Ox sont régies par l'inégalité de Heisenberg :

$$\Delta x \times \Delta p_x \geq \hbar$$

avec $\hbar = h/(2\pi)$ la constante de Planck réduite.

Interprétation

→ Ces indéterminations sont intrinsèques à la nature quantique des particules, elles ne sont en rien liées à une méconnaissance du système ou à une mesure imprécise.
→ On ne peut donc pas connaître simultanément la position et la quantité de mouvement d'une particule avec une précision aussi grande que l'on veut. Diminuer Δx nécessite d'augmenter Δp_x, de telle sorte que le produit reste supérieur à $\hbar$.
→ Pour un objet macroscopique, la « petitesse » de la constante de Planck rend la contrainte insignifiante et il est inutile d'en tenir compte. Les lois de la mécanique classique s'appliquent.
Ainsi pour un homme, avec une position connue au millimètre, l'indétermination sur la vitesse est de l'ordre de 10^{-34} m.s^{-1}, ce qui est sans fondement.

3.3 Application : oscillateur harmonique quantique

Énergie minimale d'un oscillateur quantique

Un oscillateur harmonique régi par les lois de la mécanique classique peut posséder une énergie mécanique nulle, il suffit de considérer la masse au repos pour un ressort non tendu.

Au niveau quantique, le principe d'indétermination de Heisenberg interdit cette situation ; plus précisément :

L'énergie d'un oscillateur harmonique est au moins de l'ordre de grandeur de $\hbar\omega_0$:

$$E \geq \hbar\omega_0$$

avec ω_0 la pulsation propre de l'oscillateur.

Justification

Avec $v_x = p_x/m$ et $\omega_0^2 = k/m$, l'énergie mécanique d'un oscillateur harmonique peut s'écrire :

$$E_m = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2$$

→ Pour un système d'extension spatiale a (en mécanique classique a représenterait l'amplitude des oscillations), le terme d'énergie potentielle est de l'ordre de :

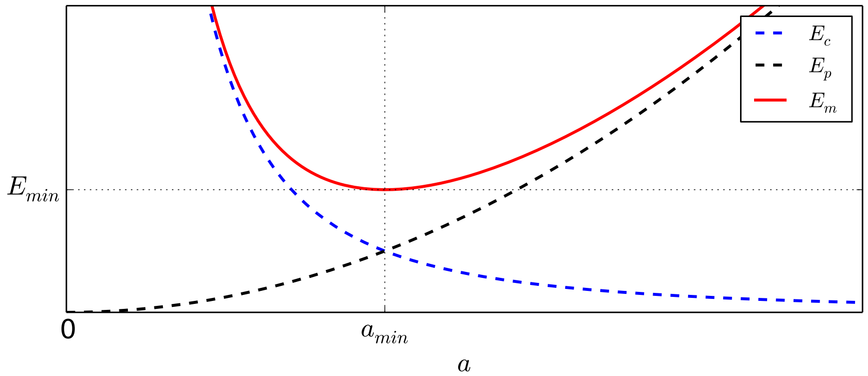
$$E_p \sim \frac{1}{2}m\omega_0^2 a^2$$

→ En localisant la particule sur une distance de l'ordre de a, la relation de Heisenberg impose pour la quantité de mouvement une valeur minimale de l'ordre de :

$$p_{min} \sim \frac{\hbar}{a} \quad \Rightarrow \quad E_c \geq E_{c,min} = \frac{\hbar^2}{2ma^2}$$

Et donc, pour l'énergie mécanique du système :

$$E_m \geq \frac{\hbar^2}{2ma^2} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 a^2$$



Comme le montrent les courbes, localiser la particule ($a \to 0$), entraîne une augmentation prohibitive de l'énergie cinétique ; inversement, réduire la vitesse de la particule est associé à une délocalisation forte de la particule ($a \to +\infty$) et par conséquent à une augmentation de l'énergie potentielle.

→ L'énergie mécanique de l'oscillateur quantique n'est donc jamais nulle, elle passe par un minimum pour $a_{min} = \sqrt{\dfrac{\hbar}{m\omega_0}}$ avec :

$$E_{min} = E_m\left(a_{min}\right) = \frac{\hbar^2}{2ma_{min}^2} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 a_{min}^2 \quad \Rightarrow \quad E_{min} = \hbar\omega_0$$

→ Par conséquent, même à température nulle $T = 0$ K, il subsiste toujours une énergie pour le système, dite « énergie de point zéro ». Un système quantique vibre, même au zéro absolu.

→ Bien évidemment, pour un oscillateur macroscopique, cette énergie de « point zéro » est insignifiante.

4 Quantification de l'énergie d'une particule confinée

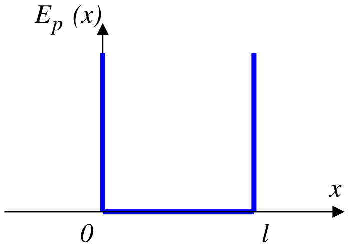
4.1 Notion de quantification

Une grandeur physique est **quantifiée** si elle ne peut prendre qu'une suite de valeurs discrètes. On parle de **quantification**.

4.2 Particule dans un puits infini à une dimension

Présentation

On considère une particule contrainte de se déplacer au sein d'un puits infini. La particule est libre de se déplacer entre deux « murs » mais elle ne peut pas en sortir.
L'énergie potentielle a donc le profil suivant :



$$E_p(x) = 0 \quad \text{pour} \quad 0 < x < l \quad \text{et} \quad E_p(x) \to +\infty \quad \text{pour} \quad x \leq 0 \quad \text{et} \quad x \geq l$$

En première approximation, ce modèle peut représenter la situation d'un électron confiné autour du noyau au sein d'un atome.

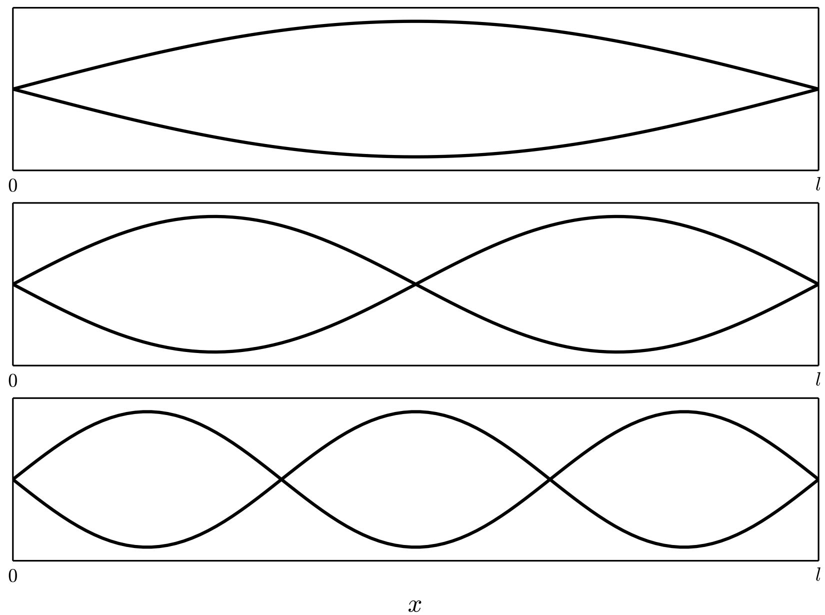
Longueurs d'onde possibles

→ Il est possible d'associer à la particule une onde de matière ayant pour longueur d'onde la longueur d'onde de de Broglie.

→ La probabilité de présence de la particule en $x = 0$ et $x = l$ est nulle, ces deux points constituent des nœuds de vibration. Le problème de cette onde de matière confinée entre $0 < x < l$ est analogue au problème des solutions ondulatoires stationnaires d'une corde vibrante fixée à ses deux extrémités.
Pour ce dernier problème, on sait que la forme des modes propres impose des valeurs bien spécifiques pour la longueur d'onde :

$$\lambda_n = \frac{2l}{n} \quad \text{avec} \quad n \in N^{\star}$$

Les courbes ci-après représentent, pour les différents modes propres, tout aussi bien la forme de la corde que la fonction d'onde associée à la particule.



Quantification de l'énergie

→ Dans le puits de potentiel, l'énergie potentielle est nulle et l'énergie de la particule s'identifie à son énergie cinétique :

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$$

→ La quantité de mouvement est donnée par la relation de de Broglie, $p = \dfrac{h}{\lambda}$, la longueur d'onde ne pouvant prendre que certaines valeurs spécifiques, il en est de même de l'énergie :

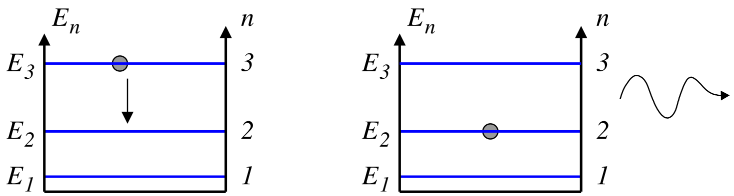
$$E_n = \frac{p_n^2}{2m} = \frac{h^2}{2m\lambda_n^2} = \frac{h^2n^2}{2m \times (2l)^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_n = \frac{n^2h^2}{8ml^2} \quad \text{avec} \quad n \in N^\star}$$

Très généralement, une particule quantique confinée dans une région limitée de l'espace possède une énergie quantifiée.

Transition entre deux niveaux d'énergie

Les niveaux d'énergie de la particule étant quantifiés, il en est de même des transitions entre deux niveaux. Ainsi le passage d'un niveau m à un niveau n (avec $m > n$) s'accompagne de l'émission d'un photon à une fréquence bien spécifique :

$$h\nu_{mn} = E_m - E_n$$



émission d'un photon

De même, cette particule ne pourra absorber que des photons d'énergie bien spécifique.

****

Capacités exigibles

→ Dualité onde-particule pour la lumière et la matière :
Relations de Planck-Einstein et de Louis de Broglie.
Évaluer des ordres de grandeurs typiques intervenant dans des phénomènes quantiques.

→ **Approche documentaire** : décrire un exemple d'expérience mettant en évidence la nécessité de la notion de photon.
Décrire un exemple d'expérience illustrant la notion d'ondes de matière.

→ Interpréter une expérience d'interférences (matière ou lumière) « particule par particule » en termes probabilistes.

→ Inégalité de Heisenberg spatiale :
À l'aide d'une analogie avec la diffraction des ondes lumineuses, établir l'inégalité en ordre de grandeur : $\Delta p \Delta x \geq \hbar$.

→ Établir le lien entre confinement spatial et énergie minimale (induit par l'inégalité de Heisenberg spatiale).

→ Quantification de l'énergie d'une particule libre confinée 1D :
Obtenir les niveaux d'énergie par analogie avec les modes propres d'une corde vibrante.
Établir le lien qualitatif entre confinement spatial et quantification.

****

Applications directes :

AD 1. Déterminer en électron-volt l'énergie d'un photon associée à une lumière verte de longueur d'onde $\lambda = 530$ nm.

AD 2. On considère un laser hélium-néon de longueur d'onde $\lambda = 633$ nm et de puissance $P = 1,0$ mW.
Déterminer le nombre de photons émis par le laser en une seconde.

AD 3. Dans l'atome d'hydrogène, l'énergie des niveaux électroniques est quantifiée selon la relation $E_n = -13,6/n^2$ en eV avec $n \in N^\star$.
Déterminer la couleur d'un photon émis lors de la désexcitation du niveau 3 vers le niveau 2.

AD 4. Au sein du noyau, les nucléons, de masse $m = 1,7 \times 10^{-27}$ kg, sont confinés dans un volume de dimension caractéristique $l = 2,0 \times 10^{-15}$ m.
En utilisant le modèle du puits infini, estimer, en MeV, l'énergie minimale d'un nucléon au sein du noyau.

AD 5. On considère le système masse-ressort vu comme un oscillateur harmonique. Évaluer l'énergie de « point zéro » d'un tel oscillateur macroscopique.
Commentaire.