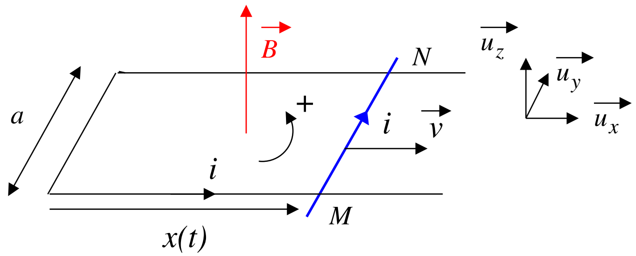
Lycée Naval, Sup 2.
Induction et forces de Laplace. 05. Circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire.

Phénomènes d'induction de Lorentz

1 Conversion de puissance mécanique en puissance électrique

1.1 Exemple en translation : rails de Laplace

On considère un circuit électrique constitué d'une partie fixe et d'une barre MN de longueur a et de masse m, l'ensemble est plongé dans un champ magnétique uniforme et constant ; la barre se déplace à la vitesse $\vec{v} = v\vec{u}_x$; la barre possède une résistance R (on néglige la résistance du reste du circuit) et on néglige l'inductance propre du circuit.
On choisit une orientation dans le sens trigonométrique pour le circuit. **Cette orientation s'impose alors à la f.e.m., au courant induit et à la surface qui s'appuie sur le contour**.



→ ***Description des phénomènes*** :

La barre, en mouvement dans le champ magnétique stationnaire, est le siège d'un phénomène d'induction de Lorentz. Une f.e.m induite apparaît au sein du circuit fermé qui est donc parcouru par un courant.
La barre parcourue par un courant est alors soumise à une force de Laplace qui va tendre à s'opposer au mouvement de la barre (**loi de Lenz**).

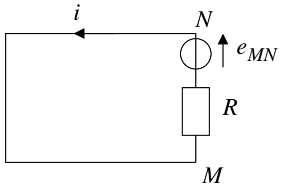
→ ***Calcul de la force électromotrice induite*** :

À l'instant t, la surface du circuit a une aire $a \times x(t)$ et est orientée selon $\vec{u}_z$. Le champ magnétique est responsable d'un flux $\Phi(t) = Bax(t)$ ce qui conduit à :

$$e = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = -Ba\frac{dx(t)}{dt} = -Bav$$

→ ***Équation électrique*** :

L'action d'un champ magnétique stationnaire sur un circuit en mouvement est équivalente à celle d'une générateur de tension de force électromotrice e_{MN}, on peut donc proposer le circuit électrique équivalent pour le montage :



La f.e.m vaut $e_{MN} = -Bav(t)$. On en déduit l'intensité qui circule dans le circuit :

$$Ri = e_{MN} = -Bav(t) \qquad (1)$$

Remarque : le courant induit ($i < 0$) tend à créer un champ magnétique induit opposé à $\vec{B}$ (**loi de Lenz en terme de flux**).

→ ***Équation mécanique*** :

Supposons que la barre ait été lancée avec une vitesse initiale v_0. En l'absence de frottements, la seule force s'appliquant sur la barre et possédant une composante horizontale non nulle est la force de Laplace :

$$\vec{F}_L = \int_M^N id\vec{l} \wedge \vec{B} = \int_M^N idl\vec{u}_y \wedge B\vec{u}_z = iB\left(\int_M^N dl\right)\vec{u}_x = iBa\,\vec{u}_x$$

Comme $i < 0$, alors $\vec{F}_L.\vec{u}_x < 0$. La force de Laplace générée tend à s'opposer au mouvement de la barre (**loi de Lenz en terme de forces**).

On applique alors la deuxième loi de Newton à la barre en projection sur l'axe horizontal pour en déduire :

$$m\frac{dv}{dt} = iBa \qquad (2)$$

Le système d'équations (1) et (2) traduit le **couplage électromécanique**.

→ ***Résolution*** :

En combinant les équations (1) et (2), on en déduit :

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{B^2a^2}{R}v$$

Cette équation admet comme solution : $v(t) = v_0e^{-t/\tau}$ avec $\tau = \dfrac{mR}{B^2a^2}$

On obtient une évolution caractéristique d'un frottement fluide. L'effet est d'autant plus efficace que B est élevé.

→ ***Aspects énergétiques*** :

⋆ Un exemple de transducteur électromécanique :

De manière générale, pour obtenir les équations énergétiques, il faut multiplier l'équation électrique par i et l'équation mécanique par v :

$$Ri^2 = ei = -Bavi \quad \text{et} \quad m\frac{dv}{dt}v = iBav$$

On combine alors les deux équations pour en déduire :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = -Ri^2$$

L'énergie cinétique fournie à la barre lors du lancement est convertie en énergie électrique (apparition d'un générateur induit) finalement dissipée par effet Joule. Le système se comporte comme un générateur électrique.

⋆ Puissance des forces de Laplace :

D'après les équations précédentes, on a, pour les puissances :

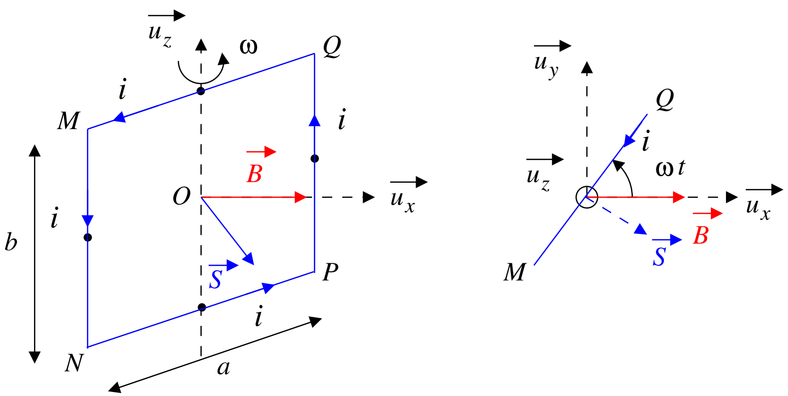
$$P_{fem} = ei = -Bavi \quad \text{et} \quad P_{Lap.} = Bavi \quad \text{soit} \quad P_{Lap.} + P_{fem} = 0$$

Ce résultat, obtenu sur un cas particulier, est très général. L'induction ne crée ni ne détruit d'énergie. Elle permet des échanges d'énergie entre phénomènes mécanique et électrique.

En présence d'un **champ magnétique stationnaire**, la puissance de la force électromotrice induite est opposée à la puissance des forces de Laplace.

$$P_{Lap.} + P_{fem} = 0$$

1.2 Exemple en rotation : l'alternateur



Un opérateur maintient la spire en rotation à la vitesse angulaire ω autour de l'axe Δ. Le dispositif est plongé dans un champ magnétique uniforme et constant. La spire d'aire S possède une résistance R.

→ ***Description des phénomènes*** :

La spire, en mouvement dans le champ magnétique stationnaire, est le siège d'un phénomène d'induction de Lorentz. Une f.e.m induite apparaît au sein du circuit fermé qui est donc parcouru par un courant.
La spire parcourue par un courant, équivalente à un moment magnétique, est alors soumise à un couple de Laplace qui va tendre à s'opposer au mouvement de rotation (**loi de Lenz**).

→ ***Calcul de la force électromotrice induite*** :

On commence par évaluer le flux du champ magnétique à travers la bobine :

$$\Phi = \iint \vec{B}.d\vec{S} = BS\cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega t\right) = BS\sin(\omega t)$$

On peut alors évaluer la f.e.m :

$$e = -\frac{d\Phi(t)}{dt} \quad \text{donc} \quad e = -BS\omega\cos(\omega t)$$

→ ***Équation électrique*** :

Si on néglige l'inductance propre de la spire, la loi des mailles conduit à $e = Ri$.

→ ***Couple des forces de Laplace et équation mécanique*** :

On commence par évaluer le couple des forces de Laplace en assimilant la spire à un moment magnétique plongé dans un champ magnétique uniforme :

$$\vec{\Gamma}_{Lap} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B} = i\vec{S} \wedge \vec{B} = iSB\cos(\omega t)\vec{u}_z$$

Sachant que $i = \dfrac{e}{R} = -\dfrac{BS\omega\cos(\omega t)}{R}$, on en déduit :

$$\vec{\Gamma}_{Lap} = -\frac{B^2S^2\omega\cos^2(\omega t)}{R}\vec{u}_z$$

Le couple des forces de Laplace est résistant, on retrouve la loi de Lenz. La rotation de la spire crée le phénomène d'induction qui, par ses effets, tend à s'opposer au mouvement qui lui a donné naissance. On applique le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe (Oz) pour la spire qui est soumise au couple moteur de l'opérateur et au couple résistant de Laplace (loi de Lenz) :

$$J\frac{d\omega}{dt} = \Gamma_{op} + \Gamma_{Lap}$$

En régime permanent, $\Gamma_{Lap} = -\Gamma_{op}$, le couple des forces de Laplace s'oppose au couple de l'opérateur qui maintient le mouvement de rotation.

→ ***Aspects énergétiques*** :

L'opérateur fournit une puissance mécanique :

$$\mathcal{P}_{op} = \Gamma_{op} \times \omega = -\Gamma_{Lap} \times \omega = \frac{B^2 S^2 \omega^2 \cos^2(\omega t)}{R}$$

La force électromotrice génère une puissance électrique :

$$\mathcal{P}_{fem} = ei = \frac{e^2}{R} = \frac{B^2 S^2 \omega^2 \cos^2(\omega t)}{R}$$

On retrouve le résultat de la première partie : la puissance du couple des forces de Laplace est l'opposé de la puissance de la f.e.m. due uniquement au déplacement du circuit.
Dans le cas présent, la puissance mécanique fournie par l'opérateur est convertie en puissance électrique, *via* la conversion électromagnétique, pour être finalement dissipée par effet Joule.

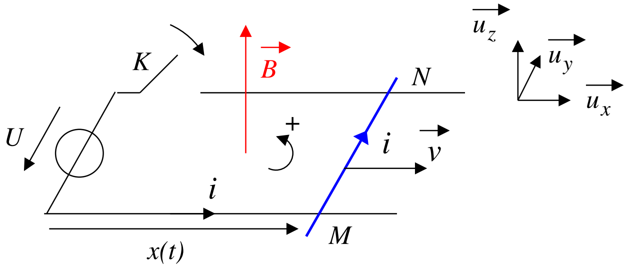
1.3 Applications

Citons quelques applications de la conversion mécanique → électrique :
- **alternateur** : ce dispositif, dont le principe est présenté dans le paragraphe précédent, peut être utilisé pour l'éclairage d'un vélo ;
- **freinage par courant de Foucault** : le modèle des rails de Laplace montre que les forces de Laplace se comportent comme une force de freinage. Ce principe est mis à profit pour le freinage à induction des trains ;
- **microphone** : l'onde de pression met en mouvement la membrane du microphone reliée à une bobine, la présence d'un aimant génère un signal électrique image du signal sonore.

2 Conversion de puissance électrique en puissance mécanique

2.1 Exemple en translation : rails de Laplace

On reprend l'exemple des rails de Laplace mais on ajoute maintenant un générateur électrique dans le circuit.
À $t = 0$, on ferme l'interrupteur, la tige, de résistance électrique R, étant initialement immobile.



→ ***Description des phénomènes*** :

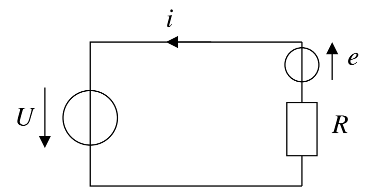
Le générateur impose une tension U qui fait circuler un courant d'intensité i dans le circuit. En présence du courant électrique et du champ magnétique, une force de Laplace met la tige en mouvement. On observe une conversion de puissance électrique vers une puissance mécanique.
Le mouvement de la tige en présence du champ magnétique entraîne l'apparition d'une force électromotrice qui s'oppose à la tension U (loi de Lenz).

→ ***Force électromotrice induite et équation électrique*** :

À l'instant t, la surface du circuit a une aire $a \times x(t)$ et est orientée selon $\vec{u}_z$. Le champ magnétique est responsable d'un flux $\Phi(t) = Bax(t)$ ce qui conduit à :

$$e = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = -Ba\frac{dx(t)}{dt} = -Bav$$

Ce qui donne pour le circuit électrique équivalent :



La loi des mailles conduit à : $i = \dfrac{U + e}{R} = \dfrac{U - Bav}{R}$ (1).

→ ***Équation mécanique*** :

L'équation mécanique est identique à celle précédemment déterminée :

$$m\frac{dv}{dt} = iBa \quad (2)$$

→ ***Résolution*** :

En combinant les deux équations, on en déduit :

$$m\frac{dv}{dt} = \left(\frac{U - Bav}{R}\right) Ba \quad \Leftrightarrow \quad m\frac{dv}{dt} + \frac{B^2a^2}{R}v = \frac{UBa}{R}$$

Équation que l'on peut réécrire :

$$\tau\frac{dv}{dt} + v = v_\infty \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{mR}{B^2a^2} \quad \text{et} \quad v_\infty = \frac{U}{Ba}$$

Pour une tige initialement immobile, la vitesse évolue selon :

$$\forall t > 0, \quad v(t) = v_\infty \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

Une fois le régime permanent atteint, la force électromotrice compense la tension du générateur, l'intensité du courant est alors nulle dans le circuit, la force de Laplace s'annule et le mouvement est alors inertiel à la vitesse v_∞.

→ ***Aspects énergétiques*** :

On multiplie la loi des mailles par l'intensité du courant et l'équation du mouvement par la vitesse :

$$U = Ri - e \quad \Rightarrow \quad Ui = Ri^2 - ei = Ri^2 + Bavi$$
$$m\frac{dv}{dt} = iBa \quad \Rightarrow \quad m\frac{dv}{dt}v = iBav$$

En combinant les deux équations, on en déduit :

$$Ui = Ri^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

La puissance électrique fournit par le générateur se partage en une partie dissipée par effet Joule et une seconde partie qui contribue à augmenter l'énergie cinétique de la tige.

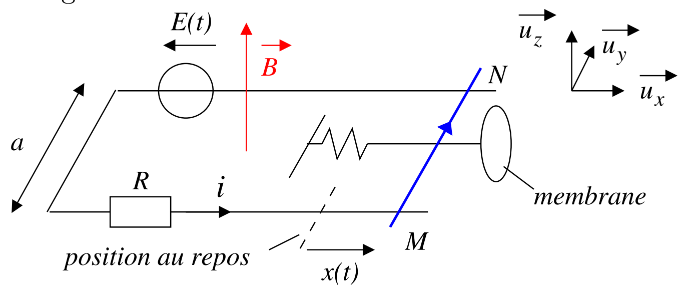
2.2 Application : le haut-parleur électrodynamique

Un haut-parleur transforme un signal électrique en un signal sonore.

On étudie le principe du haut-parleur sur la géométrie simplifiée des rails de Laplace. La tige mobile est solidaire d'une membrane qui émet l'onde sonore.

→ ***Description des phénomènes*** :

Le générateur impose une tension électrique correspondant au signal à émettre, l'intensité créée entraîne, en présence du champ magnétique, une force de Laplace qui met la tige et la membrane en mouvement.
Les mouvements mécaniques de la membrane doivent reproduire fidèlement, en fréquence et en amplitude, les variations de la tension d'excitation afin d'émettre un son fidèle au signal à transmettre.



→ ***Force électromotrice induite et équation électrique*** :

La situation est identique à l'exemple précédemment traité :

$$E + e = Ri \quad (1) \quad \text{avec} \quad e = -Ba\dot{x}$$

→ ***Équation mécanique*** :

Le système tige-membrane est soumis à son poids, à la réaction du support, à la force de Laplace, à l'action du ressort et à une force de frottement fluide qui modélise l'effet de l'onde sonore émise (une partie de l'énergie est utilisée pour émettre de l'énergie acoustique). En projection sur l'axe (Ox), la relation de la dynamique conduit à :

$$m\frac{dv}{dt} = -kx + iBa - \alpha v \quad (2) \quad \text{avec} \quad v = \dot{x}$$

→ ***Aspects énergétiques*** :

En multipliant l'équation mécanique par la vitesse et l'équation électrique par l'intensité du courant, on en déduit le bilan énergétique :

$$m\frac{dv}{dt} \times v = -kx \times \frac{dx}{dt} + iBa \times v - \alpha v \times v \;\Rightarrow\; \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) = iaBv - \alpha v^2$$
$$Ei + ei = Ri^2 \quad \Rightarrow \quad Ei - Bavi = Ri^2$$

En couplant les deux équations, on en déduit :

$$Ei = Ri^2 + \alpha v^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2\right)$$

La puissance fournie par le générateur est partiellement dissipée par effet Joule, sert à émettre l'onde sonore (αv^2) et à mettre en mouvement le système ressort-tige-membrane.

<u>**Capacités exigibles**</u> :

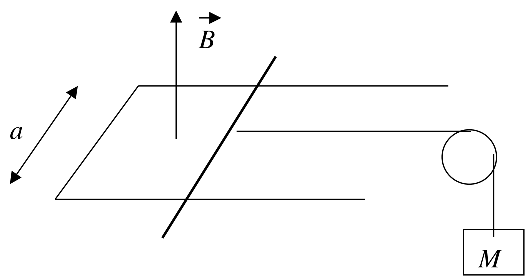
→ Conversion de puissance mécanique en puissance électrique :
Rails de Laplace. Spire rectangulaire soumise à un champ magnétique extérieur uniforme et en rotation uniforme autour d'un axe fixe orthogonal au champ magnétique.
Interpréter qualitativement les phénomènes observés.
Écrire les équations électrique et mécanique en précisant les conventions de signe.
Effectuer un bilan énergétique.
Connaître des applications dans le domaine de l'industrie ou de la vie courante.
Expliquer l'origine des courants de Foucault et en connaître des exemples d'utilisation.

→ Conversion de puissance électrique en puissance mécanique :
Haut-parleur électrodynamique.
Expliquer le principe de fonctionnement d'un haut-parleur électrodynamique dans la configuration simplifiée des rails de Laplace.
Effectuer un bilan énergétique.

****

AD 1. Rails de Laplace

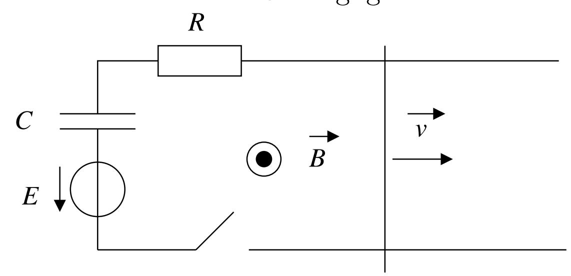
On considère le dispositif ci-dessous : une barre (de masse m, de résistance R) est susceptible de glisser (sans frottement) sur des rails de Laplace (de résistance négligeable), plongés dans un champ magnétique uniforme.
La barre est attachée à une masse M par l'intermédiaire d'une poulie parfaite. On ne tient pas compte de l'inductance propre du circuit. À $t = 0$, l'opérateur lâche la tige.



1. Décrire qualitativement les phénomènes observés.
2. Déterminer l'expression de la vitesse au cours du temps.

AD 2. Rails de Laplace

On considère le dispositif représenté ci-dessous. À l'instant initial, le condensateur est déchargé, la barre est immobile, et on ferme l'interrupteur. On note m la masse de la tige, et a l'écartement des rails. On néglige les frottements.



1. Déterminer $q(t)$, $i(t)$ et $v(t)$.
2. Faire un bilan énergétique.