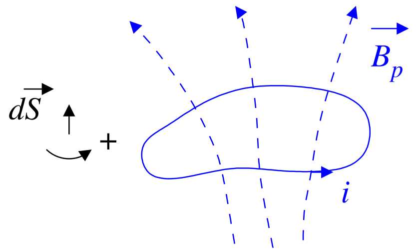
Lycée Naval, Sup 2.
Induction et forces de Laplace. 04. Circuit fixe dans un champ magnétique qui dépend du temps.

Phénomènes d'induction de Neumann

1 Auto-induction

1.1 Inductance propre et flux propre

On considère un circuit fermé parcouru par un courant d'intensité i.



Cette source de courant crée un champ magnétique propre $\vec{B}_p$ qui traverse la spire elle-même et génère un flux propre :

$$\Phi_p = \iint_\Sigma \vec{B}_p . d\vec{S}$$

Le champ magnétique $\vec{B}_p$ est proportionnel à l'intensité ; il en est de même pour le flux propre qui peut donc s'écrire :

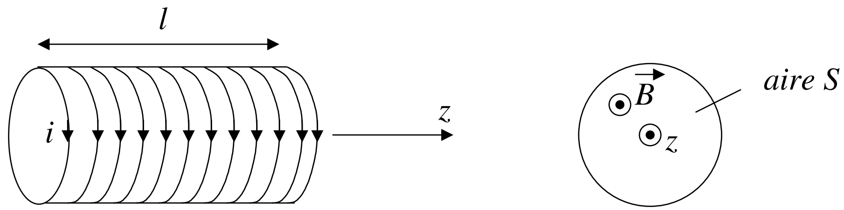
$$\boxed{\Phi_p = L \times i}$$

→ La formule précédente constitue la définition de L, l'inductance propre de la spire, qui s'exprime en henry (H).

→ L'orientation du circuit s'impose à l'intensité et au vecteur surface, l'inductance propre est donc un **coefficient positif**, purement géométrique, qui ne dépend que de la forme du circuit.

1.2 Inductance propre d'un solénoïde infini

On considère un solénoïde constitué de N spires jointives, de section S, parcourues par un courant d'intensité i. Le solénoïde a une longueur l suffisamment importante devant ses dimensions latérales pour appliquer les résultats du solénoïde infini.



Le champ magnétique est uniforme au sein du solénoïde et vaut $\vec{B} = \mu_0 \dfrac{N}{l} i \vec{u}_z$.

Ce champ magnétique est créé par la bobine et engendre un flux à travers la bobine elle-même, il s'agit bien d'un flux propre qui correspond au flux à travers les N spires de la bobine :

$$\Phi_p = \mu_0 \frac{N}{l} i \times NS = \frac{\mu_0 N^2 S}{l} \times i \quad \text{donc} \quad \boxed{L = \frac{\mu_0 N^2 S}{l}}$$

→ On constate que l'inductance propre varie comme N^2 et sera donc significative pour un enroulement important de spires.

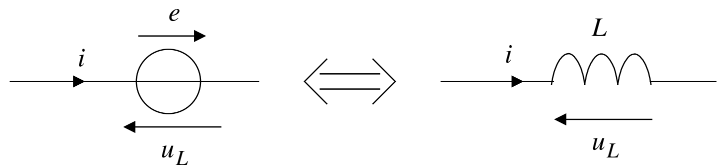
→ Pour une bobine de 8 cm de long, comptant 500 spires, réparties sur un carré de côté 5 cm, $L \simeq 10$ mH.

1.3 Circuit électrique équivalent

Si l'intensité du courant parcourant le circuit dépend du temps, le flux propre varie dans le temps et il apparaît, d'après la loi de Faraday, une force électromotrice :

$$e = -\frac{d\Phi_p}{dt} = -\frac{d}{dt}(Li) = -L\frac{di}{dt}$$

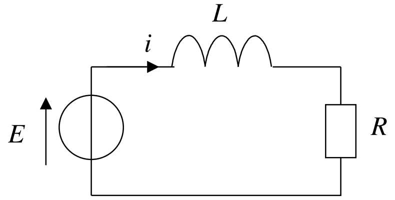
En prenant garde aux orientations (la force électromotrice est définie conformément au courant électrique), on en déduit le schéma électrique équivalent de la bobine :



→ **Loi de Lenz** : la force électromotrice apparaît du fait d'une variation de l'intensité du courant, pour une intensité croissante, la force électromotrice est négative, elle constitue un générateur qui tend à contrer la mise en place du courant. On retrouve l'idée que dans un circuit inductif il y a un retard à l'installation du courant (Cf. échelon de tension pour un circuit RL).

1.4 Bilan énergétique

On considère un circuit constitué d'un générateur de tension de force électromotrice E, d'une résistance R et d'une bobine d'inductance L :



Partant de la loi des mailles, on multiplie l'équation par l'intensité du courant pour obtenir un bilan de puissance :

$$E = Ri + L\frac{di}{dt} \quad \Rightarrow \quad Ei = Ri^2 + L\frac{di}{dt}i = Ri^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right)$$

Le bilan de puissance s'établit alors selon :

- Ei : puissance fournie par le générateur ;
- Ri^2 : puissance dissipée par effet Joule ;
- $Li^2/2$: énergie magnétique stockée dans la bobine.

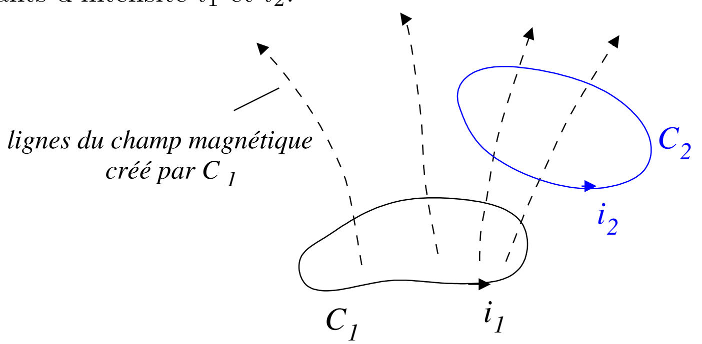
L'**énergie magnétique** d'un circuit d'inductance propre L parcouru par un courant d'intensité i est :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}Li^2$$

2 Induction entre deux circuits

2.1 Inductance mutuelle

On considère deux circuits $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ fermés et filiformes parcourus respectivement par des courants d'intensité i_1 et i_2.



Le circuit $\mathcal{C}_1$ crée un champ $\vec{B}_1$ responsable, au travers du circuit $\mathcal{C}_2$, d'un flux $\Phi_{1\to2}$, proportionnel à l'intensité i_1 :

$$\Phi_{1\to2} = \iint_{S_2} \vec{B}_1.d\vec{S} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Phi_{1\to2} = M_{21} \times i_1}$$

De même, le circuit $\mathcal{C}_2$ crée un champ $\vec{B}_2$ responsable, au travers du circuit $\mathcal{C}_1$, d'un flux $\Phi_{2\to1}$, proportionnel à l'intensité i_2 :

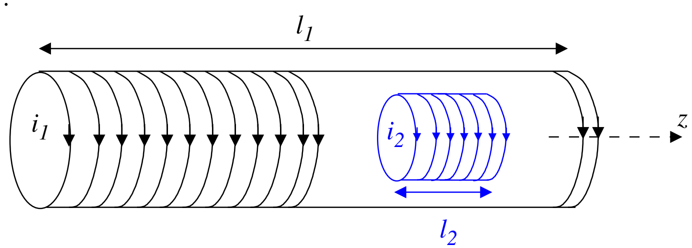
$$\Phi_{2\to1} = \iint_{S_1} \vec{B}_2.d\vec{S} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Phi_{2\to1} = M_{12} \times i_2}$$

On peut montrer (théorème de Neumann) que $\boxed{M_{12} = M_{21} = M}$.

Ces formules définissent M, l'inductance mutuelle des deux circuits, elle ne dépend que des caractéristiques géométriques des deux circuits et de leur position relative, son signe dépend des orientations choisies pour $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ et est donc arbitraire.

2.2 Exemple de calcul d'une inductance mutuelle

On souhaite déterminer l'inductance mutuelle entre deux « grandes » bobines de même axe. Une première bobine de longueur l_1, constituée de N_1 spires de surface S_1 et parcourue par un courant d'intensité i_1, entoure une seconde bobine de longueur l_2 constituée de N_2 spires de surface S_2 et parcourue par un courant d'intensité i_2.



La bobine « 1 » crée, en son sein, un champ magnétique : $\vec{B}_1 = \mu_0 \frac{N_1}{l_1} i_1 \vec{u}_z$

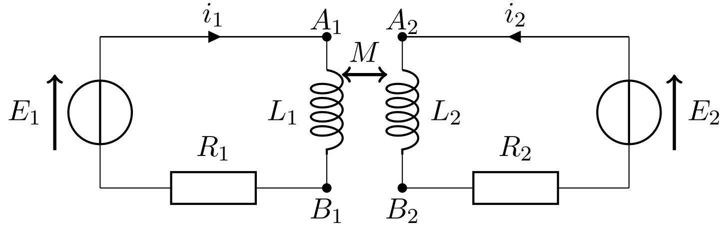
Ce champ magnétique engendre un flux à travers la bobine « 2 » :

$$\Phi_{1\to2} = N_2 \times \vec{B}_1.\vec{S}_2 = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S_2}{l_1} i_1 = M i_1$$

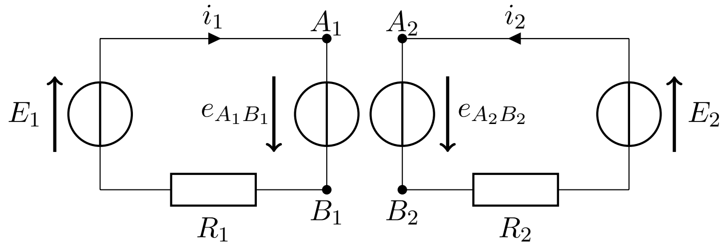
On en déduit pour l'inductance mutuelle : $M = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S_2}{l_1}$.

2.3 Circuit électrique équivalent

On considère le système électrique ci-dessous constitué de deux circuits $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ couplés entre eux par une inductance mutuelle M.



On peut définir le schéma électrique équivalent :



Le circuit $\mathcal{C}_1$, parcouru par un courant d'intensité i_1, est soumis à son flux propre $\Phi_{1,p} = L_1 i_1$ et au flux produit par le circuit $\mathcal{C}_2$ à travers $\mathcal{C}_1$, $\Phi_{2\to1} = Mi_2$, ce qui donne pour le flux total ressenti par le circuit $\mathcal{C}_1$:

$$\Phi_1 = \Phi_{1,p} + \Phi_{2\to1} = L_1 i_1 + Mi_2$$

Ce flux induit une force électromotrice dans $\mathcal{C}_1$:

$$e_{A_1B_1} = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -L_1\frac{di_1}{dt} - M\frac{di_2}{dt}$$

De même pour le circuit $\mathcal{C}_2$: $e_{A_2B_2} = -\dfrac{d\Phi_2}{dt} = -L_2\dfrac{di_2}{dt} - M\dfrac{di_1}{dt}$

2.4 Bilan énergétique des circuits couplés

Équations électriques :

Dans le circuit 1, la loi des mailles s'écrit :

$$E_1 = R_1 i_1 - e_{A_1B_1}$$

avec $e_{A_1B_1} = -\dfrac{d\Phi_1}{dt} = -\dfrac{d}{dt}\left(L_1 i_1 + Mi_2\right)$

On en déduit l'équation électrique pour la maille de gauche :

$$E_1 = R_1 i_1 + L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} \qquad (1)$$

On obtient de même pour le circuit de droite :

$$E_2 = R_2 i_2 + L_2\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_i}{dt} \qquad (2)$$

On est en présence d'un système d'équations différentielles couplées.

Bilan énergétique :

En multipliant ces équations électriques respectivement par i_1 et par i_2, et en sommant, on voit apparaître le bilan énergétique :

$$E_1 i_1 + E_2 i_2 = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + L_1 i_1\frac{di_1}{dt} + Mi_1\frac{di_2}{dt} + L_2 i_2\frac{di_2}{dt} + Mi_2\frac{di_1}{dt}$$
$$E_1 i_1 + E_2 i_2 = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}L_1 i_1^2 + Mi_1 i_2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2\right)$$

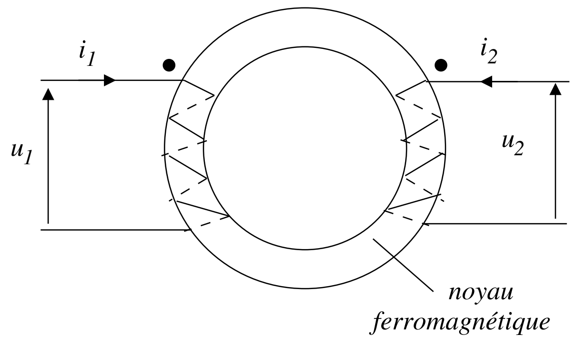
- le premier membre représente la puissance fournie par les générateurs ;
- une partie de cette puissance est dissipée par effet Joule comme l'indique les deux premiers termes du membre de droite ;
- la quantité supplémentaire est associée à l'énergie emmagasinée sous forme d'énergie magnétique au sein du système.

L'énergie magnétique d'un système de deux bobines couplées a pour expression :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + Mi_1 i_2$$

3 Application : le transformateur de tension

3.1 Principe



Un transformateur est un convertisseur d'énergie électrique. Il transfère, **en alternatif**, de la puissance électrique d'une source placée au primaire à une charge placée dans le circuit secondaire.

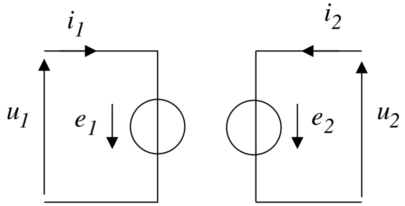
Deux circuits conducteurs, galvaniquement isolés, sont bobinés sur un noyau torique constitué d'un matériau ferromagnétique. Le circuit d'entrée est appelé *primaire*, il est constitué de N_1 spires, le circuit de sortie est appelé *secondaire*, il est constitué de N_2 spires.

Un courant variable au primaire génère un champ magnétique variable au sein du noyau qui canalise les lignes de champ. Il apparaît au secondaire un flux magnétique variable et donc une force électromotrice.

Le primaire et le secondaire sont couplés *via* le noyau. On admettra que le noyau ferromagnétique canalise parfaitement les lignes de champ et que le flux du champ magnétique est le même sur toute section droite du noyau.

3.2 Loi de transformation des tensions

En négligeant les résistances des enroulements, le circuit équivalent au transformateur est le suivant :



En conséquence :

$$e_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -\frac{d}{dt}\left[N_1 B(t) S\right] = -N_1 S \frac{dB(t)}{dt} \quad \text{et} \quad e_2 = -N_2 S \frac{dB(t)}{dt}$$

Pour un régime variable, $\frac{dB(t)}{dt}$ est non nul et on en déduit :

$$\frac{u_2(t)}{u_1(t)} = \frac{N_2}{N_1}$$

En régime alternatif, les tensions au primaire et au secondaire sont reliées par le rapport de transformation m :

$$\frac{u_2(t)}{u_1(t)} = \frac{N_2}{N_1} = m$$

3.3 Application

Les alternateurs des centrales électriques fournissent une tension sinusoïdale, de fréquence 50 Hz, d'une valeur efficace de l'ordre du kV.

Pour réduire les pertes en ligne lors du transport, il faut augmenter la tension afin de diminuer l'intensité I du courant et donc les pertes par effet Joule.

On utilise à cet effet deux étages de transformateurs qui portent la tension à 400 kV. À l'arrivée la tension est progressivement abaissée.

****

Capacités exigibles :

→ Auto-induction :
Différencier le flux propre des flux extérieurs.
Utiliser la loi de modération de Lenz.
Évaluer et connaître l'ordre de grandeur de l'inductance propre d'une bobine de grande longueur, le champ magnétique créé par une bobine infinie étant donné.
Mesurer la valeur de l'inductance propre d'une bobine.

Conduire un bilan de puissance et d'énergie dans un système siège d'un phénomène d'auto-induction en s'appuyant sur un schéma électrique équivalent.

→ Deux bobines en interaction :
Déterminer l'inductance mutuelle entre deux bobines de même axe de grande longueur en « influence totale », le champ magnétique créé par une bobine infinie étant donné.
Connaître des applications dans le domaine de l'industrie ou de la vie courante.

Établir le système d'équations en régime sinusoïdal forcé en s'appuyant sur des schémas électriques équivalents.
Conduire un bilan de puissance et d'énergie.

→ Transformateur de tension :
Établir la loi des tensions.