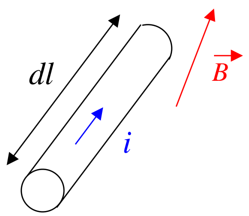
Actions d'un champ magnétique

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux actions mécaniques exercées par un champ magnétique sur un conducteur électrique et à la possibilité de générer un effet moteur *via* une conversion électrique $\rightarrow$ mécanique.

1 Force élémentaire de Laplace

On considère un élément de conducteur de longueur dl, parcouru par un courant d'intensité i et plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme et constant.



On admettra que cet élément de conducteur est soumis à une force élémentaire de Laplace donnée par :

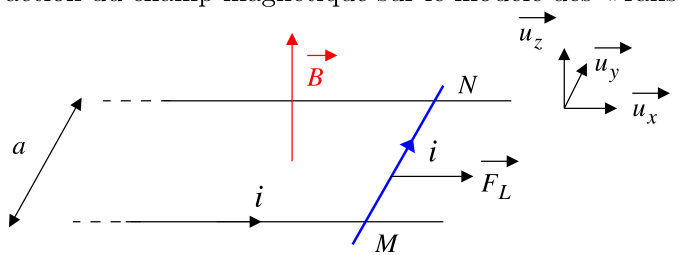
$$\boxed{d\vec{f}_L = id\vec{l} \wedge \vec{B}}$$

avec d$\vec{l}$ parallèle à l'élément de conducteur et orienté selon le courant.

2 Mouvement de translation

2.1 Résultante des forces de Laplace sur une tige en translation

On présente l'action du champ magnétique sur le modèle des « rails de Laplace ».



Une tige $\mathcal{T}$ conductrice est posée sur deux rails, eux aussi conducteurs, appelés rails de Laplace. Le circuit fermé est parcouru par un courant d'intensité i.

L'ensemble du dispositif est plongé dans un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{u}_z$ uniforme et constant.

La force élémentaire $d\vec{F}_L$ qui s'exerce sur un élément de longueur dl de la tige orienté par le courant d'intensité i a pour expression :

$$d\vec{F}_L = id\vec{l} \wedge \vec{B} = idl\vec{u}_y \wedge B\vec{u}_z \quad \Rightarrow \quad d\vec{F}_L = i \times dl \times B\ \vec{u}_x$$

On intègre alors sur l'ensemble de la tige, les forces élémentaires étant toutes parallèles et de même sens :

$$\vec{F}_L = \int_M^N iBdl\vec{u}_x = iB\left(\int_M^N dl\right)\vec{u}_x \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{F}_L = iaB\vec{u}_x}$$

2.2 Puissance des forces de Laplace

La tige $\mathcal{T}$ se déplaçant à la vitesse $\vec{v} = v\vec{u}_x$ et soumise à la force de Laplace $\vec{F}_L$ reçoit une puissance mécanique :

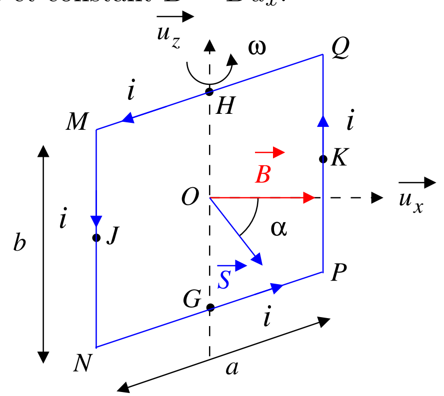
$$\mathcal{P}_L = \vec{F}_L.\vec{v} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{P}_L = iaBv}$$

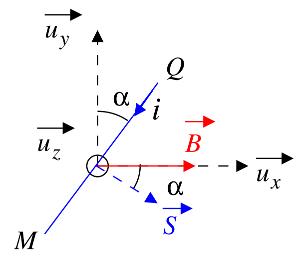
Pour un courant d'intensité i débité par un générateur, le champ magnétique permet *via* la force de Laplace une conversion de puissance électrique $\rightarrow$ mécanique.

3 Mouvement de rotation

3.1 Couple des actions mécaniques de Laplace

On considère le modèle d'une spire rectangulaire pouvant tourner autour de l'axe Oz à la vitesse angulaire ω. La spire est plongée dans un champ magnétique uniforme et constant $\vec{B} = B\vec{u}_x$.





Les forces de Laplace se compensent deux à deux, la résultante des forces est nulle. Pour ce système en rotation, on s'intéresse au couple des actions mécaniques.

→ Segment PQ : d'après la partie précédente, la force qui s'exerce sur ce segment vaut,

$$\vec{F}_{PQ} = i\overrightarrow{PQ} \wedge \vec{B} = ib\vec{u}_z \wedge B\vec{u}_x \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_{PQ} = ibB\vec{u}_y$$

Cette force s'applique en K milieu du segment PQ, ce qui donne pour le moment de cette force par rapport à O :

$$\vec{M}_O(\vec{F}_{PQ}) = \overrightarrow{OK} \wedge \vec{F}_{PQ} = \frac{a}{2} ibB\sin\alpha\vec{u}_z$$

→ Segment MN :

$$\vec{F}_{MN} = i\overrightarrow{MN} \wedge \vec{B} = -ib\vec{u}_z \wedge B\vec{u}_x \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_{PQ} = -ibB\vec{u}_y$$

Cette force s'applique en J milieu du segment MN, ce qui donne pour le moment de cette force par rapport à O :

$$\vec{M}_O(\vec{F}_{MN}) = \overrightarrow{OJ} \wedge \vec{F}_{MN} = \frac{a}{2} ibB\sin\alpha\vec{u}_z$$

→ Segment QM : la force a pour expression

$$\vec{F}_{QM} = i\overrightarrow{QM} \wedge \vec{B}$$

Les deux vecteurs étant dans le plan horizontal, la force résultante est dirigée selon $\vec{u}_z$. Le point d'application de cette force étant H le milieu de QM :

$$\vec{M}_O(\vec{F}_{QM}) = \underbrace{\overrightarrow{OH}}_{//\vec{u}_z} \wedge \underbrace{\vec{F}_{QM}}_{//\vec{u}_z} = \vec{0}$$

→ Segment NP : de même $\vec{M}_O(\vec{F}_{NP}) = \vec{0}$.

On en déduit le couple résultant des actions de Laplace sur la spire :

$$\vec{\Gamma}_L = \vec{M}_O(\vec{F}_{PQ}) + \vec{M}_O(\vec{F}_{MN}) = iabB\sin\alpha\vec{u}_z$$

À la spire d'aire $S = a \times b$ parcourue par un courant d'intensité i, on associe un moment magnétique $\overrightarrow{\mathcal{M}} = i\vec{S}$. On remarque alors :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}} \wedge \vec{B} = i\vec{S} \wedge \vec{B} = iabB\sin\alpha\vec{u}_z = \vec{\Gamma}_L$$

Généralisation : un circuit ou un aimant de moment magnétique $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ plongé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ subit un couple magnétique de moment :

$$\vec{\Gamma}_L = \overrightarrow{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$$

3.2 Puissance du couple magnétique

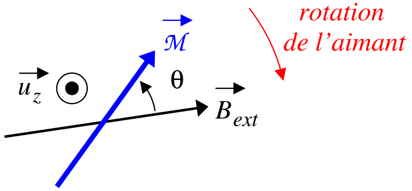
La spire, en rotation à la vitesse angulaire ω autour de l'axe Oz et soumise à un couple magnétique $\vec{\Gamma}_L = \Gamma_L\vec{u}_z$, reçoit une puissance mécanique :

$$\mathcal{P}_L = \vec{\Gamma}_L.\omega\vec{u}_z = \Gamma_L \times \omega$$

4 Action d'un champ magnétique sur un aimant

4.1 Orientation d'un aimant

Le couple magnétique exercé par un champ magnétique extérieur $\vec{B}$ sur un aimant de moment magnétique $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ tend à aligner le vecteur $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ sur le vecteur $\vec{B}$.



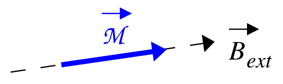
$\vec{\Gamma}_L = -\mathcal{M}B\sin\theta\vec{u}_z$, le moment tend à ramener l'aimant le long de la direction du champ magnétique.

Ce principe est bien évidemment celui mis en œuvre pour le fonctionnement d'une boussole.

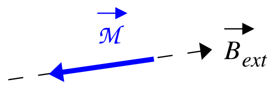
4.2 Équilibres stable et instable

Si seul le couple magnétique est présent (aiguille aimantée posée sur un pivot parfait), les positions d'équilibre sont associées à la nullité du couple magnétique. Le couple magnétique s'annule pour deux positions :

- $\theta = 0$: aimant parallèle et de même sens que $\vec{B}$;
- $\theta = \pi$: aimant parallèle et de sens opposé à $\vec{B}$.



équilibre stable



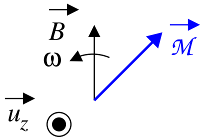
équilibre instable

Seule la position $\theta = 0$ est une position d'équilibre stable.

5 Effet moteur d'un champ magnétique tournant

5.1 Principe du moteur synchrone

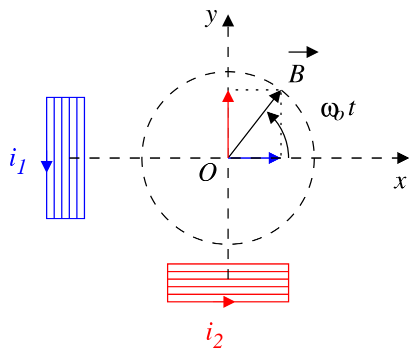
Le moment magnétique tend à s'aligner sur le champ magnétique. En présence d'un champ magnétique tournant, l'aimant, poursuivant le champ, est entraîné par celui-ci.



Le champ magnétique tournant va entraîner avec lui le moment magnétique

5.2 Création d'un champ magnétique tournant

La manière la plus simple de générer un champ magnétique tournant consiste à utiliser deux bobines placées en quadrature spatiale (bobines d'axes Ox et Oy) et de les faire parcourir par des courants en quadrature temporelle (déphasés de $\pi/2$).



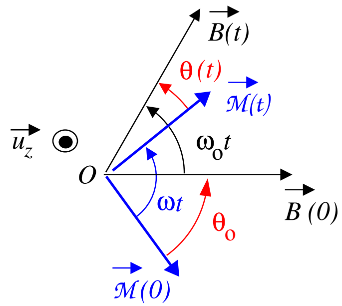
En tout point de son axe, une bobine crée un champ magnétique dirigé selon cet axe et proportionnel à l'intensité du courant.
Avec $i_1(t) = i_0 \cos(\omega_0 t)$ et $i_2(t) = i_0 \sin(\omega_0 t)$, on obtient un champ magnétique tournant :

$$\vec{B} = ki_1(t)\vec{u}_x + ki_2(t)\vec{u}_y \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = ki_0\left[\cos(\omega_0 t)\vec{u}_x + \sin(\omega_0 t)\vec{u}_y\right]$$

Remarque : le courant distribué étant triphasé, on utilise préférentiellement trois bobines dont les axes font entre eux des angles de $2\pi/3$ et dont les courants sont déphasés de $2\pi/3$.

5.3 Mise en équation du mouvement du moment magnétique

On considère le mouvement d'un moment magnétique en rotation dans un champ magnétique tournant :



À l'instant t, le champ magnétique $\vec{B}(t)$ et le moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}(t)$ forment entre eux un angle $\theta(t)$ tel que :

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t - \omega t = \theta_0 + (\omega_0 - \omega)\, t$$

L'action du champ magnétique tournant se traduit par un couple dont le moment par rapport à l'axe de rotation est :

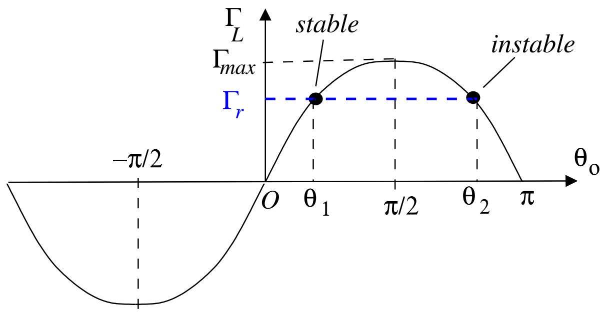
$$\Gamma_z(t) = \mathcal{M}B \sin\left[\theta(t)\right] = \mathcal{M}B \sin\left[(\omega_0 - \omega)\, t + \theta_0\right]$$

En moyenne dans le temps, le couple est non nul ssi $\boxed{\omega = \omega_0}$, l'action du champ magnétique tournant se traduit alors par un couple de moment :

$$\boxed{\Gamma_z = \mathcal{M}B \sin\theta_0}$$

Le moment magnétique et le champ magnétique tournent à la même vitesse : on parle de machine synchrone.

Fonctionnement moteur et stabilité



$\rightarrow$ Fonctionnement moteur : le dispositif est moteur pour $\theta_0 \in [0, \pi]$, le moment magnétique est en retard sur le champ magnétique : « l'aimant est entraîné par le champ tournant, l'aimant tente de s'aligner sur le champ ».

→ Point de fonctionnement : en régime permanent le couple $\Gamma_L > 0$ équilibre la résultante du couple de frottement et du couple imposé par la charge utile, couple résistant que l'on note, en norme, Γ_r. Le point de fonctionnement correspond à $\Gamma_L = \Gamma_r$. Deux positions de fonctionnement θ_1 et θ_2 apparaissent.

→ Stabilité :
Partons de la position $\theta_0 = \theta_1$ et supposons que, pour une raison quelconque, l'aimant ralentisse légèrement, celui-ci tend à prendre du retard sur le champ magnétique, θ_0 augmente ; comme $\Gamma_L = \Gamma_{max} \sin \theta_0$ et $0 < \theta_1 < \pi/2$, le couple moteur augmente et l'aimant rattrape son retard.
Un raisonnement similaire montre que la position θ_2 est instable.

→ Décrochage : au fur et à mesure de l'augmentation du couple résistant, l'angle θ_2 augmente jusqu'à atteindre $\pi/2$. Si on impose un couple résistant supérieur au couple maximal Γ_{max}, il y a décrochage et l'aimant finit par s'immobiliser.

****

Capacités exigibles :

→ Différencier le champ magnétique extérieur subi du champ magnétique propre créé par le courant filiforme.

→ Établir et connaître l'expression de la résultante des forces de Laplace dans le cas d'une barre conductrice placée dans un champ magnétique extérieur uniforme et stationnaire.
Évaluer la puissance des forces de Laplace.

→ Établir et connaître l'expression du moment du couple subi en fonction du champ magnétique extérieur et du moment magnétique de la spire rectangulaire.

Applications directes

AD 1. Oscillation d'un aimant

On considère un aimant droit de moment magnétique $\mathcal{M}$ reposant, en son milieu O, sur une pointe lui permettant de tourner librement dans le plan horizontal. On note J le moment d'inertie de l'aimant par rapport à l'axe Oz.
L'aimant est plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$ également horizontal.
On écarte légèrement l'aimant de sa position d'équilibre stable.
Déterminer l'expression de la période associée aux petites oscillations.

AD 2. Équilibre d'une tige

On considère une tige en cuivre cylindrique de longueur $l = 20$ cm et de diamètre $d = 1,0$ cm.
L'une des extrémités de cette tige est fixée à un point d'attache, l'autre est laissée libre de telle sorte que la tige puisse osciller dans le plan vertical. Les extrémités de la tige sont reliées à un générateur de tension.
On impose un champ magnétique uniforme perpendiculaire au plan d'oscillation de la tige.
Donner une estimation de la valeur du champ magnétique à imposer pour permettre à la tige de faire, à l'équilibre, un angle de 10 degrés avec la verticale.