Lycée Naval, Sup 2.
MÉCANIQUE 2. 05. Mouvements dans un champ de force centrale conservatif

Applications directes

AD 1. Orbite de la Terre autour du Soleil

Pour calculer la période de révolution, on applique la troisième loi de Kepler :

$$T = \left(\frac{4\pi^2 a^3}{GM_s}\right)^{1/2} = \left(\frac{4\pi^2 \times (149,8\times 10^9)^3}{6,67\times 10^{-11}\times 2,00\times 10^{30}}\right)^{1/2} \simeq \boxed{365 \text{ jours}}$$

Pour le calcul de la vitesse, on peut utiliser à nouveau la troisième loi de Kepler sachant que pour un cercle $v = \dfrac{2\pi a}{T}$:

$$v^2 = \frac{4\pi^2 a^2}{T^2} = \frac{GM_s}{a} \quad \text{donc} \quad \boxed{v = \sqrt{\frac{GM_s}{a}} = 29,8 \text{ km.s}^{-1}}$$

AD 2. Distance minimale d'approche

1. La force de répulsion coulombienne est une force centrale qui dérive d'une énergie potentielle, l'énergie mécanique E_M du proton se conserve :
$$E_M = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 a_0}$$
La dernière égalité traduit la conservation de l'énergie mécanique entre l'instant initial (vitesse v_0, distance infinie) et l'instant correspondant à la distance minimale d'approche ($v = 0$), on en déduit :
$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 a_0} \quad \text{soit} \quad \boxed{a_0 = \frac{Ze^2}{2\pi\varepsilon_0 m v_0^2}}$$
2. D'après la formule précédente, plus le proton possède une grande vitesse initiale, plus il peut s'approcher du noyau ; avec suffisamment d'énergie, il peut pénétrer dans le noyau et la façon dont il en ressort renseigne sur les interactions qu'il a subies et donc sur la structure interne du noyau.

AD 3. Mouvement de la planète Mars

On applique la troisième loi de Kepler, pour la Terre et Mars en orbite autour du Soleil. On note avec des indices M les grandeurs pour Mars et avec des indices T les grandeurs pour la Terre :

$$\frac{a_M^3}{T_M^2} = \frac{a_T^3}{T_T^2} \quad \Rightarrow T_M = T_T \times \left(\frac{a_M}{a_T}\right)^{3/2}$$

Application numérique : $T_M = 1\times 1,5^{3/2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_M = 1,84 \text{ années terrestres}}$.

AD 4. Distance minimale d'approche

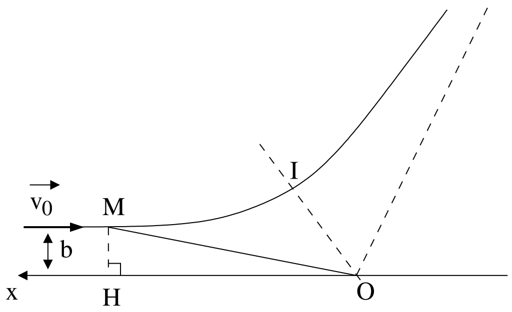
Le noyau d'hélium est soumis à une force électrostatique répulsive :

$$\vec{f}_e = \frac{k}{r^2}\vec{u}_r \quad \text{avec} \quad k = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}$$

Cette force dérive d'une énergie potentielle : $E_p = \dfrac{k}{r}$.

Pour une force centrale, le moment cinétique par rapport à O et l'énergie mécanique se conserve.

→ Conservation du moment cinétique :



Au point I, la vitesse est nécessairement orthoradiale ($\dot{r} = 0$ par définition de la distance minimale d'approche) :

$$\vec{L}_o(I) = \overrightarrow{OI}\wedge m\vec{v}_I = r_m\vec{u}_r \wedge v_I\vec{u}_\theta \quad \Rightarrow \quad \vec{L}_o = m r_m v_I \vec{u}_z$$

On exprime ensuite le moment cinétique pour un point M qui tend vers l'infini (la position initiale de la particule) :

$$\vec{L}_o = \overrightarrow{OM}\wedge m\vec{v}_M = \left(\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM}\right)\wedge m\vec{v}_M$$

Pour un point M qui tend vers l'infini $\overrightarrow{OH}//\vec{v}_M$ et donc par application du bras de levier :

$$\vec{L}_o^\infty = mbv_0\vec{u}_z$$

De la comparaison des deux formules, on en déduit : $bv_0 = v_I r_m \quad (1)$.

→ Conservation de l'énergie mécanique : on exprime l'énergie mécanique en I et à l'infini :

$$E_M = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_I^2 + \frac{k}{r_m} \quad (2)$$

On élimine la vitesse v_I de la relation (2) en utilisant la relation (1) :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{bv_0}{r_m}\right)^2 + \frac{k}{r_m}$$

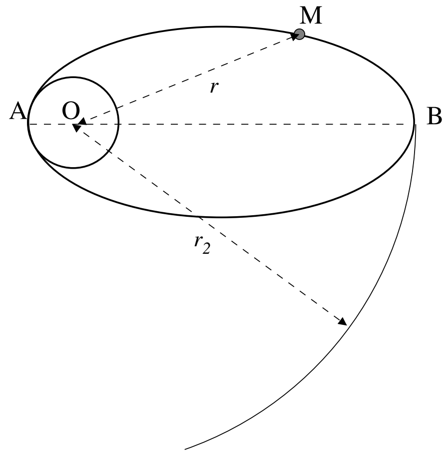
$$1 = \left(\frac{b}{r_m}\right)^2 + \frac{k}{r_m}\times\frac{2}{mv_0^2} \quad \Leftrightarrow \quad r_m^2 - \frac{2k}{mv_0^2}r_m - b^2 = 0$$

On résout cette équation en ne conservant que la solution positive :

$$r_m = \frac{1}{2}\left(\frac{2k}{mv_0^2} + \sqrt{\frac{4k^2}{m^2v_0^4} + 4b^2}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{r_m = \frac{k}{mv_0^2} + \sqrt{\frac{k^2}{m^2v_0^4} + b^2}}$$

AD 5. Ellipse de transfert

Un satellite tourne initialement sur une orbite circulaire $r_1 = OA$ autour de la Terre ; grâce à un moteur auxiliaire, on lui communique une vitesse supplémentaire, il s'éloigne alors sur la partie supérieure de l'ellipse de transfert ; une fois arrivé au point B, on communique un supplément de vitesse au satellite afin qu'il tourne sur une orbite circulaire de rayon $r_2 = OB$.



1. $\boxed{2a = r_1 + r_2}$.
2. L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle :
$$E_M = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_Tm}{r}$$
Pour une orbite elliptique, l'énergie mécanique a pour expression :
$$E_M = \frac{-GM_Tm}{2a} = -\frac{GM_Tm}{r_1 + r_2}$$
La comparaison de ces deux expressions conduit à :
$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_Tm}{r} = -\frac{GM_Tm}{r_1 + r_2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v^2 = 2GM_T\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1 + r_2}\right]}$$
3. On applique alors cette formule au point A juste après le passage sur l'orbite elliptique et au point B juste avant le passage sur l'orbite circulaire :

$$v_1^2 = 2GM_T\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1 + r_2}\right] \quad \Rightarrow \quad v_1^2 = \frac{2GM_Tr_2}{r_1(r_1 + r_2)} \quad \Rightarrow \quad r_1^2v_1^2 = \frac{2GM_Tr_2r_1}{(r_1 + r_2)}$$
$$v_2^2 = 2GM_T\left[\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1 + r_2}\right] \quad \Rightarrow \quad v_2^2 = \frac{2GM_Tr_1}{r_2(r_1 + r_2)} \quad \Rightarrow \quad r_2^2v_2^2 = \frac{2GM_Tr_2r_1}{(r_1 + r_2)}$$

On en déduit $\boxed{r_1v_1 = r_2v_2}$.
Cette égalité n'est rien d'autre que la constante des aires appliquée au point A et B pour la trajectoire elliptique.