Lycée Naval, Sup 2.
MÉCANIQUE 1. 1.1. Description et paramétrage du mouvement d'un point
1.2. Description du mouvement d'un solide dans deux cas particuliers

Correction des applications directes du cours

AD 1. Lancer avec frottement fluide.

Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, on applique la deuxième loi de Newton à la balle soumise à son poids et à la force de frottement fluide.

$$m\vec{a} = m\vec{g} - k\vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = \vec{g} \quad \text{avec} \quad \tau = k/m$$

L'objet étant lancé selon l'axe Oz correspondant à la verticale ascendante, on projette l'équation selon cette direction :

$$\frac{dv_z}{dt} + \frac{v_z}{\tau} = -g$$

Cette équation différentielle est une équation du premier ordre à coefficient constant avec second membre, la solution est de la forme :

$$v_z(t) = Ae^{-t/\tau} - g\tau$$

Compte tenu de la condition initiale, $v_z(0) = v_0$:

$$v_0 = A - g\tau \quad \Leftrightarrow \quad A = v_0 + g\tau$$

$$v_z(t) = (v_0 + g\tau)\, e^{-t/\tau} - g\tau$$

L'instant du sommet de la trajectoire est caractérisé par $v_z(t_s) = 0$,

$$0 = (v_0 + g\tau)\, e^{-t_s/\tau} - g\tau$$

On en déduit :

$$(v_0 + g\tau)\, e^{-t_s/\tau} = g\tau \qquad \boxed{t_s = \tau \ln\left(1 + \frac{v_0}{g\tau}\right)}$$

AD 2. Lancer avec frottement solide.

L'objet est soumis à son poids et à la réaction du support. Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, on applique le principe fondamental de la dynamique au palet.

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{R}$$

On projette cette relation sur l'axe horizontal et l'axe vertical :

$$m\frac{dv_x}{dt} = -\left\|\vec{R}_T\right\| \quad \text{et} \quad 0 = \left\|\vec{R}_N\right\| - mg$$

Dans le cas d'un glissement : $\left\|\vec{R}_T\right\| = \mu \left\|\vec{R}_N\right\|$

On en déduit :

$$m\frac{dv_x}{dt} = -\mu \times mg \quad \Rightarrow \quad \frac{dv_x}{dt} = -\mu g$$

On intègre par rapport au temps en tenant compte de la condition initiale :

$$v_x(t) = -\mu g t + v_0$$

L'arrêt du mouvement se produit à l'instant t_a tel que :

$$v_x(t_a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{t_a = \frac{v_0}{\mu g}}$$

On intègre une nouvelle fois pour obtenir la position au cours du temps :

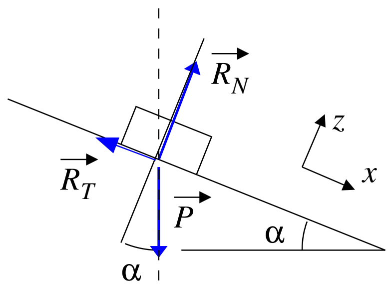
$$x(t) = -\frac{\mu g t^2}{2} + v_0 t$$

Ce qui donne pour d la distance parcourue :

$$d = x(t_a) = -\frac{\mu g v_0^2}{2\mu^2 g^2} + v_0 \times \frac{v_0}{\mu g} \quad \Rightarrow \quad \boxed{d = \frac{v_0^2}{2\mu g}}$$

AD 3. Détermination d'un coefficient de frottement solide

On commence par réaliser un schéma de la situation à l'équilibre :



Le système étant à l'équilibre :

$$\vec{R}_T + \vec{R}_N + \vec{P} = \vec{0}$$

On projette selon $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_z$:

$$R_T = mg\sin\alpha \quad \text{et} \quad R_N = mg\cos\alpha$$

On en déduit : $\dfrac{R_T}{R_N} = \tan\alpha$.

L'équilibre est rompu lorsque le solide se met à glisser, ce qui est caractérisé par :

$$\frac{R_T}{R_N} = \mu \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\tan\alpha_c = \mu}$$