Correction des applications directes du cours

AD 1. Coordonnées cartésiennes.

1. En coordonnées cartésiennes, les composantes du vecteur vitesse s'obtiennent simplement en dérivant les composantes du vecteur position :

$$\boxed{\overrightarrow{v} = \begin{cases} v_x(t) & = & \dot{x}(t) & = & 1 \\ v_y(t) & = & \dot{y}(t) & = & 6t \\ v_z(t) & = & \dot{z}(t) & = & 0 \end{cases}}$$

Et de même pour le vecteur accélération à partir du vecteur vitesse :

$$\boxed{\overrightarrow{a} = \begin{cases} a_x(t) & = & \dot{v}_x(t) & = & 0 \\ a_y(t) & = & \dot{v}_y(t) & = & 6 \\ a_z(t) & = & \dot{v}_z(t) & = & 0 \end{cases}}$$

2. En combinant les équations horaires, on obtient $y(x) = 3x^2$, il s'agit de l'équation d'une parabole.

AD 2. Coordonnées cylindriques.

On applique les formules de correspondance entre les coordonnées cartésiennes et cylindriques :

$$\boxed{\begin{cases} r & = & \sqrt{x^2+y^2} & = & \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2} \\ \theta & = & \arccos(x/r) & = & \arccos(1/\sqrt{2}) = \dfrac{\pi}{4} \\ z & = & z & = & 1 \end{cases}}$$

AD 3. Coordonnées cylindriques.

Lieu des points :

1. r =constante : un cylindre de rayon r et centré sur l'axe Oz.
2. θ =constante : un plan passant par l'axe Oz.
3. z =constante : un plan horizontal

AD 4. Trajectoires rectilignes.

1. Pour l'automobiliste A_1, partant de l'accélération, on intègre deux fois pour obtenir l'équation horaire (en tenant compte des constantes d'intégration $v_x(0) = 0$ et $x(0) = 0$) :

$$a_{1x}(t) = a_1 \rightarrow v_{1x}(t) = a_1 t + cste = a_1 t \rightarrow \boxed{x_1(t) = \frac{a_1 t^2}{2} + cste = \frac{a_1 t^2}{2}}$$

Pour l'automobiliste A_2, partant de la vitesse, on intègre une fois pour obtenir l'équation horaire en tenant compte de la condition initiale $x_2(0) = D$

$$v_{2x}(t) = v_2 \rightarrow \boxed{x_2(t) = v_2 t + cste = v_2 t + D}$$

2. À l'instant t_0, lorsque les automobilistes se rencontrent, $x_1(t_0) = x_2(t_0)$, ce qui donne :

$$\frac{a_1}{2}{t_0}^2 = v_2 t_0 + D \quad \Leftrightarrow \quad a_1 {t_0}^2 - 2v_2 t_0 - 2D = 0$$

On conserve la racine positive de l'équation (attention que la vitesse doit être exprimée en m.s^{-1}) :

$$\boxed{t_0 = \frac{v_2 + \sqrt{v_2^2 + 2Da_1}}{a_1} = \frac{(40/3,6) + \sqrt{(40/3,6)^2 + 2 \times 40 \times 3,0}}{3,0} = 10 \text{ s}}$$

AD 5. Mouvement ralenti.

On intègre la relation $\dfrac{d\omega}{dt} = -\alpha$ entre $t = 0$ et un instant quelconque, compte tenu de la condition initiale $\omega(0) = \omega_0$.

$$\boxed{\omega(t) = -\alpha t + \omega_0}$$

Le système s'arrête à l'instant t_a tel que $\omega(t_a) = 0$, c'est à dire $\boxed{t_a = \dfrac{\omega_0}{\alpha}}$.

Pour déterminer la position angulaire au cours du temps, on part de la relation entre la vitesse angulaire et l'angle θ :

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -\alpha t + \omega_0 \quad \Rightarrow \quad \theta(t) = -\frac{\alpha t^2}{2} + \omega_0 t + \theta_0$$

C'est à dire $\Delta\theta = \theta(t) - \theta_0 = -\dfrac{\alpha t^2}{2} + \omega_0 t$, c'est à dire à l'instant t_a :

$$\Delta\theta(t_a) = -\frac{\alpha t_a^2}{2} + \omega_0 t_a = \frac{\omega_0^2}{2\alpha}$$

En multipliant cette distance angulaire par le rayon du cercle, on obtient la distance parcourue jusqu'à l'arrêt :

$$\boxed{d = \frac{R\omega_0^2}{2\alpha}}$$