Correction des applications directes du cours

AD 1.

1. Si $R = 0$, il n'y a pas de perte par effet Joule et la solution est donc une **oscillation sinusoïdale**.
2. Pour déterminer le type de régime, déterminons la valeur du facteur de qualité :

$$\boxed{Q = \frac{1}{R} \times \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{100} \times \sqrt{\frac{20 \times 10^{-3}}{100 \times 10^{-9}}} \simeq 4,5 > \frac{1}{2}}$$

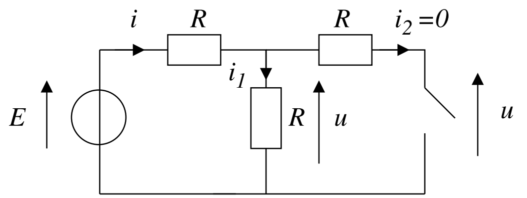
Le facteur de qualité étant supérieur à $1/2$, on est donc en présence d'un régime pseudo-périodique.

3. Le régime critique correspond à $Q = (1/R) \times \sqrt{L/C} = 1/2$, soit :

$$\boxed{R_c = 2\sqrt{L/C} = 8,9 \times 10^2\ \Omega}$$

AD 2.

1. En régime permanent le condensateur est chargé, l'intensité i_2 est alors nulle ; de plus la bobine se comporte comme un fil, le circuit peut alors se simplifier selon :



La formule du diviseur de tension conduit à : $\boxed{u_\infty = E/2}$.

On obtient de plus $\boxed{i_\infty = \frac{E}{2R}}$

2. On considère la maille de droite : $Ri_1 = Ri_2 + u$, avec $i_2 = C\frac{du}{dt}$, on en déduit :

$$Ri_1 = RC\frac{du}{dt} + u \quad \Rightarrow \quad \boxed{i_1 = C\frac{du}{dt} + \frac{u}{R}}$$

3. La loi des nœuds s'écrit $i = i_1 + i_2$, donc :

$$i = C\frac{du}{dt} + \frac{u}{R} + i_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{i = 2C\frac{du}{dt} + \frac{u}{R}}$$

4. On considère la maille de gauche :

$$E = Ri + Ri_1 + L\frac{di}{dt} = 2RC\frac{du}{dt} + u + RC\frac{du}{dt} + u + 2LC\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{L}{R}\frac{du}{dt}$$

En regroupant les termes, on en déduit la relation proposée :

$$\boxed{\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{3R}{L} + \frac{1}{RC}\right)\frac{du}{dt} + \frac{u}{LC} = \frac{E}{2LC}}$$

5. Avec $L = R^2C$, l'équation différentielle se simplifie selon :

$$\boxed{\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{2}{RC}\frac{du}{dt} + \frac{u}{R^2C^2} = \frac{E^2}{2R^2C^2}}$$

On peut alors mettre l'équation différentielle sous sa forme canonique :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = \frac{\omega_0^2}{2}E \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{1}{RC} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{2}$$

On est donc en présence d'un **régime critique**.

6. La tension aux bornes du condensateur et l'intensité du courant dans la bobine sont continues, donc $u(0^+) = 0$ et $i(0^+) = 0$.

De plus, la tension u étant nulle à l'instant initial, on a : $i_1(0^+) = i_2(0^+)$, avec $i = i_1 + i_2$.

Comme $i(0^+) = 0$, on en déduit $i_2(0^+) = 0$ et donc $\frac{du}{dt}(0^+) = 0$.

7. La solution générale de l'équation différentielle est la somme d'une solution particulière et de la solution générale sans second membre, sachant que le régime est critique :

$$u(t) = \frac{E}{2} + (At + B)\, e^{-t/(RC)}$$

Les conditions initiales imposent :

$$u(0^+) = 0 = \frac{E}{2} + B \quad \text{et} \quad \frac{du}{dt}(0^+) = 0 = A - \frac{B}{RC}$$

On en déduit $B = E/2$ et $A = E/(2RC)$; finalement :

$$\boxed{\forall t \geq 0, \quad u(t) = \frac{E}{2} - \frac{E}{2}\left(1 + \frac{t}{RC}\right)e^{-t/(RC)}}$$

8. On sait que $u_\infty = E/2$, on en déduit à l'aide de la courbe $E = 12\ V$.

Pour $t_1 = 4RC$, $u(t_1) = 6 - 6 \times (1 + 4)e^{-4}$, donc $\boxed{u(t_1) \simeq 5,5\ \text{V}}$.

En reportant cette valeur sur la courbe, on obtient $t_1 \simeq 0,4$ ms et $\boxed{RC \simeq 0,1\ \text{ms}}$.

AD 3.

Pour une bobine réelle, l'impédance vaut $\underline{Z} = r + jL\omega$, avec $\underline{U}_m = \underline{Z}.\underline{I}_m$; on en déduit donc :

$\star$ $I_m = |\underline{I}_m| = \dfrac{U_m}{|\underline{Z}|} = \dfrac{U_m}{\sqrt{r^2 + (L\omega)^2}} = \dfrac{6}{\sqrt{9 + (0,010 \times 2\pi \times 100)^2}} = \boxed{0,86\ \text{A}}$

$\star$ $\arg \underline{I}_m = \arg \underline{U}_m - \arg (r + jL\omega) = 0 - \arctan \dfrac{L\omega}{r}$

$\arg \underline{I}_m = -\arctan \left(\dfrac{0,010 \times 2\pi \times 10^2}{3} \right) \simeq \boxed{-64^o}$

AD 4.

Connaissant la tension aux bornes de l'association série, on déterminer la tension aux bornes de la résistance en appliquant la formule du pont diviseur de tension :

$\underline{U}_m^R = \dfrac{R}{R + jL\omega} \underline{U}_m$, ce qui donne en terme d'amplitude :

$U_m^R = \dfrac{R \times U_m}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} = \dfrac{100 \times 10}{\sqrt{10^4 + (0,020 \times 2\pi \times 10^3)^2}} = \boxed{6,2\ \text{V}}$.

AD 5.

On cherche à déterminer l'intensité dans une branche connaissant l'intensité totale, le théorème à appliquer est le pont diviseur de courant :

$\underline{I}_{1m} = \dfrac{jC_1\omega \underline{I}_m}{jC\omega + jC_1\omega} = \dfrac{C_1}{C + C_1} \underline{I}_m$.

On souhaite $\dfrac{C_1}{C_1 + C} = \dfrac{1}{3}$, ce qui impose $\boxed{C_1 = C/2}$.