

## Filtrage linéaire

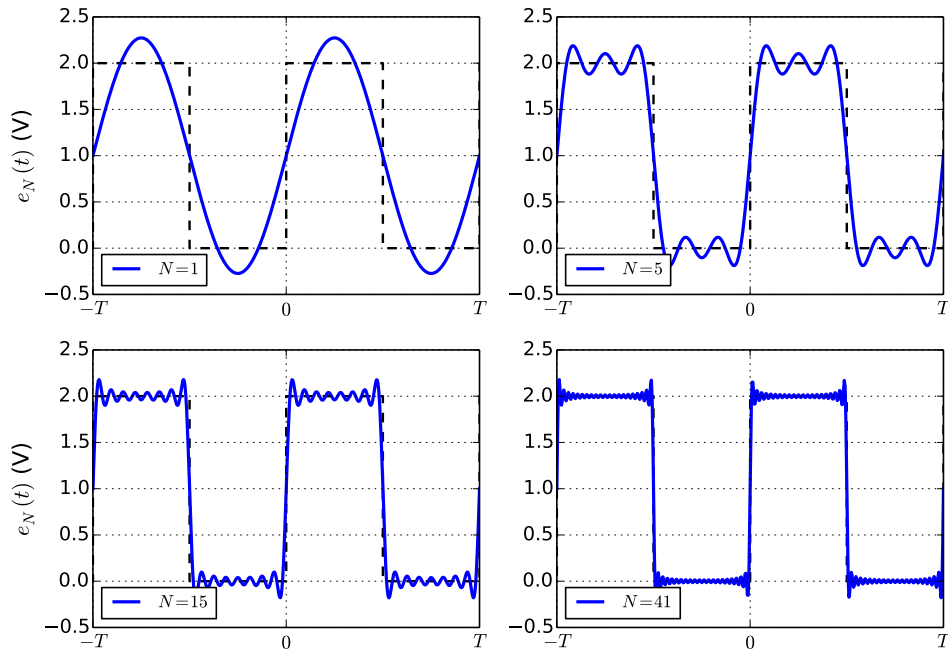
# 1 Signaux périodiques

## 1.1 Décomposition en série de Fourier

### Exemple du signal créneau

Considérons les sommes partielles de la forme :

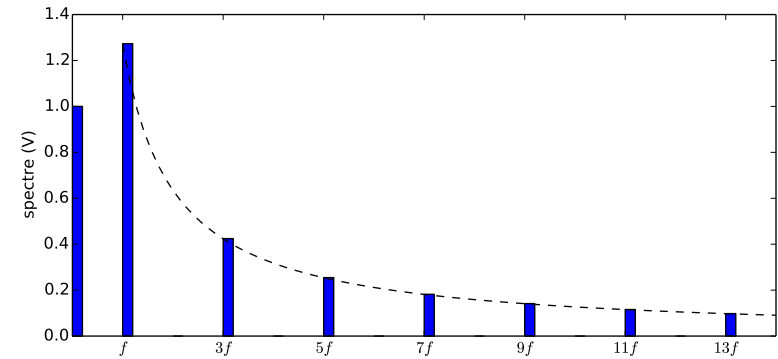
$$e_N(t) = 1 + \sum_{n=1}^N 2 \frac{1 + (-1)^{n+1}}{n\pi} \sin\left(n \times 2\pi \frac{t}{T}\right)$$



Le premier terme de la somme représente la valeur moyenne du signal. En sommant des sinus dont la fréquence est multiple de la fréquence fondamentale  $f = 1/T$ , avec des coefficients bien choisis, on constate qu'avec suffisamment de termes on finit par reproduire un signal créneau de moyenne 1 V, d'amplitude 1 V et de même période que le fondamental.

Seuls les harmoniques impairs sont non nuls et leur amplitude décroît comme  $1/n$ ,

le spectre de ce signal créneau de moyenne non nulle a donc l'allure suivante :



### Généralisation

Soit  $v(t)$  un signal  $T$ -périodique tel que  $v(t+T) = v(t)$ ; en posant  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ , il est possible de décomposer  $v(t)$  en une somme de termes sinusoïdaux de pulsation multiple de  $\omega_0$  dite *série de Fourier* :

$$v(t) = V_0 + \sum_{k=1}^{\infty} V_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k)$$

- $V_0$  représente la valeur moyenne du signal ;
- le fondamental est associé au terme de rang  $k = 1$  ;
- les termes suivants constituent les harmoniques de rang  $k$ .

## 1.2 Valeur moyenne, valeur efficace

### Définitions

Soit  $v$  un signal  $T$ -périodique, on définit :

→ **sa valeur moyenne** :

$$\langle v \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v(t) dt \quad \text{avec } t_0 \text{ quelconque}$$

→ **sa valeur efficace notée  $V_{\text{eff}}$**  :

$$V_{\text{eff}}^2 = \langle v^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v^2(t) dt \quad \text{avec } t_0 \text{ quelconque}$$

### Exemple 1 : signal sinusoïdal

Considérons un signal sinusoïdal de la forme  $e(t) = E \cos(\omega t)$  avec  $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$

→ valeur moyenne :  $\langle e \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T E \cos(\omega t) dt = 0$

→ valeur efficace :

$$E_{\text{eff}}^2 = \frac{E^2}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t) dt = \frac{E^2}{T} \int_0^T \frac{1 + \cos(2\omega t)}{2} dt = \frac{E^2}{T} \int_0^T \frac{1}{2} dt = \frac{E^2}{2}$$

Un signal sinusoïdal  $e(t) = E \cos(\omega t)$  a pour valeur efficace  $E_{\text{eff}} = E/\sqrt{2}$ , ainsi :  
 $e(t) = E_{\text{eff}} \sqrt{2} \cos(\omega t)$

Cette valeur efficace est fondamentale. C'est cette valeur qu'affichent les multimètres numériques en mode alternatif. On verra l'an prochain qu'elle est liée à la puissance électrique.

Les « 220 V » du réseau de distribution d'électricité correspondent à la valeur efficace de la tension.

### Exemple 2 : signal créneau centré

Considérons  $v$ , un signal créneau centré (valeur moyenne nulle) d'amplitude  $E$  et de période  $T$ ; déterminons sa valeur efficace :

$$E_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T v^2(t) dt = \frac{1}{T} \left( \int_0^{T/2} E^2 dt + \int_{T/2}^T (-E)^2 dt \right) = \frac{1}{T} \times E^2 \times 2 \times \frac{T}{2}$$

$$E_{\text{eff}} = E$$

Cette valeur n'est pas à retenir, elle est là pour montrer que le facteur «  $\sqrt{2}$  » ne s'applique qu'au cas du signal sinusoïdal.

### 1.3 Égalité de Parseval

Le carré de la valeur efficace d'un signal  $v$  est la somme des carrés des valeurs efficaces de sa valeur moyenne et de ses harmoniques :

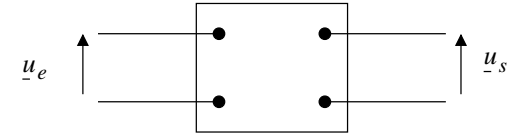
$$V_{\text{eff}}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} V_{k,\text{eff}}^2 = V_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{V_k^2}{2}$$

Cette égalité traduit le fait que la puissance délivrée par le signal est identique à la somme des puissances des harmoniques.

## 2 Fonction de transfert. Diagramme de Bode

### 2.1 Notion de filtre, fonction de transfert

Un filtre est un quadripôle linéaire qui permet de sélectionner certaines fréquences.

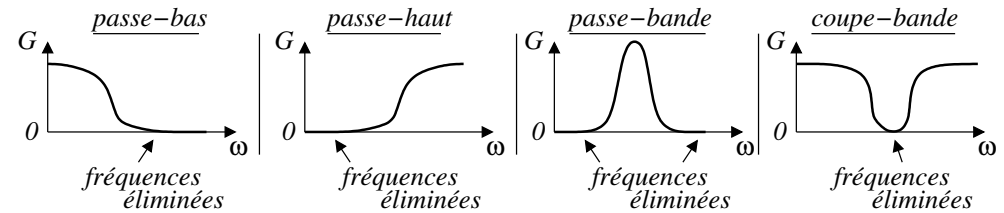


On définit la **fonction de transfert du filtre** selon  $\underline{H}(j\omega) = \frac{u_s}{u_e} = \frac{U_s}{U_e}$

→  $G = |\underline{H}(j\omega)| = \frac{U_s}{U_e}$ , le **gain** du filtre,

→  $\varphi = \arg(\underline{H}(j\omega))$ , la **phase**.

### 2.2 Principaux types de filtre



### 2.3 Gain en décibel et diagramme de Bode

→ On définit  $G_{dB}$  le **gain en décibel** :  $G_{dB} = 20 \log G$

→ Le **diagramme de Bode** consiste à représenter :

$G_{dB}$  en fonction de  $\log(\omega)$ , et  $\varphi$  en fonction de  $\log(\omega)$

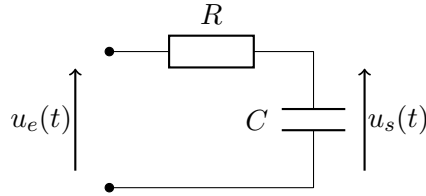
→ On définit enfin  $\omega_c$ , la **pulsation de coupure à -3dB**, telle que :

$$G(\omega_c) = \frac{G_{\text{max}}}{\sqrt{2}}$$

Justification :

$$20 \log G(\omega_c) = 20 \log \frac{G_{\text{max}}}{\sqrt{2}} = 20 \log G_{\text{max}} - 20 \log \sqrt{2} = G_{dB}^{\text{max}} - 3\text{dB}$$

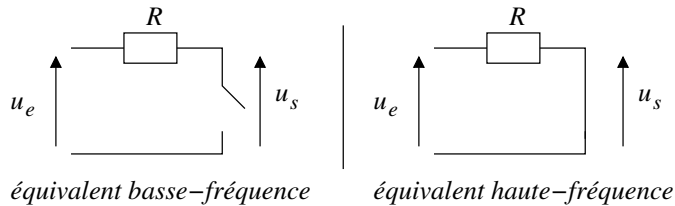
## 2.4 Exemple : filtre passe-bas du premier ordre



### Comportement asymptotique

→ Basse fréquence :  $\omega \rightarrow 0$ ,  $|Z_c| \rightarrow +\infty$ , donc  $\underline{u}_s \simeq \underline{u}_e$  et  $G \simeq 1$ .

→ Haute fréquence :  $\omega \rightarrow +\infty$ ,  $|Z_c| \rightarrow 0$ , donc  $\underline{u}_s \simeq 0$  et  $G \simeq 0$ .



Le filtre ne laisse passer que les « basses » fréquences, il s'agit d'un filtre passe-bas.

### Fonction de transfert

On détermine la fonction de transfert en utilisant un diviseur de tension :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{1/jC\omega}{R + 1/jC\omega} = \frac{1}{1 + jRC\omega} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

$\omega_0$  est la pulsation propre du filtre.

À l'aide de la fonction de transfert, on peut retrouver les cas limites :

→ Basse fréquence :  $\omega \ll \omega_0$ ,  $\underline{H}(j\omega) \simeq 1$ .

→ Haute fréquence :  $\omega \gg \omega_0$ ,  $\underline{H}(j\omega) \simeq 0$ .

Connaissant la fonction de transfert, on en déduit le gain et le déphasage :

$$G = |\underline{H}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_0)^2}} \quad \text{et} \quad \varphi = -\arg\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_0}\right) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

Le gain est maximal à fréquence nulle et vaut  $G_{max} = 1$ .

La pulsation de coupure vérifie :  $G(\omega_c) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_c/\omega_0)^2}} = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

On en déduit  $\omega_c = \omega_0$ .

### Diagramme de Bode

→ Gain en décibel :

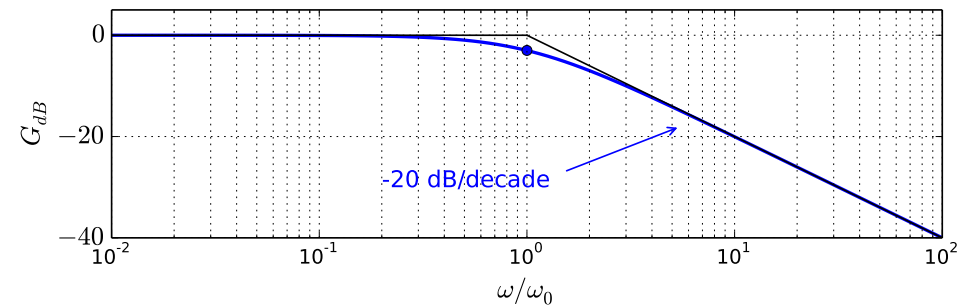
On exprime le gain en décibel :  $G_{dB} = 20 \log G = -10 \log [1 + (\omega/\omega_0)^2]$

Plus que la fonction elle-même, il faut savoir déterminer et tracer les asymptotes à haute et basse fréquences :

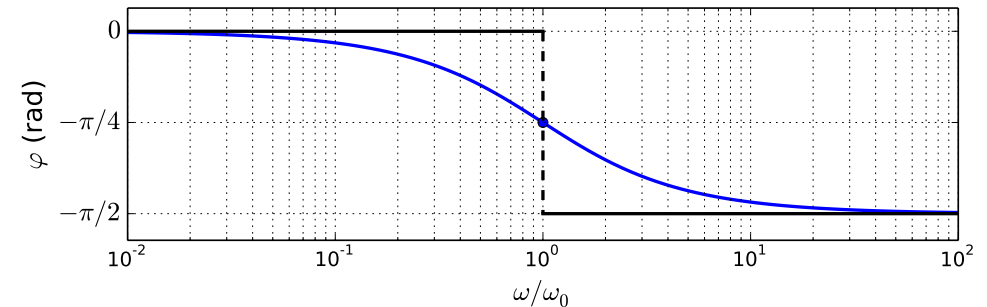
Basse fréquence : pour  $\omega \ll \omega_0$ ,  $G_{dB} \simeq -10 \log 1 = 0$  (asymptote horizontale)

Haute fréquence : pour  $\omega \gg \omega_0$ ,  $G_{dB} \simeq -10 \log (\omega/\omega_0)^2 \simeq -20 \log (\omega/\omega_0)$

L'asymptote haute fréquence possède une pente de  $-20$  dB/décade, à chaque fois que la pulsation est multipliée par un facteur 10, on observe une baisse de 20 dB pour le gain en décibel et donc une division par 10 du gain réel.



→ Déphasage :



On détermine aisément les asymptotes à basse et haute fréquence pour le déphasage en considérant les équivalents de la fonction de transfert dans ces deux

limites :

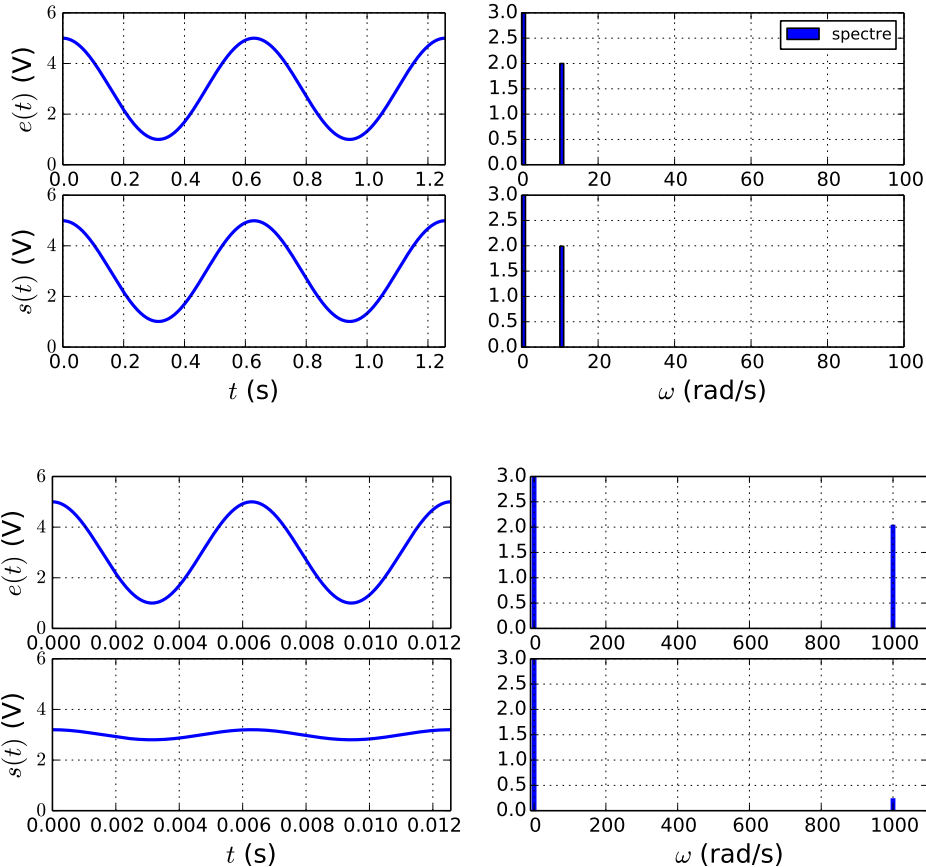
- Basse fréquence :  $\underline{H}(\omega) \sim_0 1 \Rightarrow \varphi \simeq 0$
- Haute fréquence :  $\underline{H}(\omega) \sim_{+\infty} -\frac{j\omega_0}{\omega} \Rightarrow \varphi \simeq -\pi/2$
- À la fréquence de coupure  $\omega_c = \omega_0$  :  $\underline{H}(\omega_0) = \frac{1}{1+j} \Rightarrow \varphi = -\pi/4$

### Action du filtre sur un signal électrique

On considère le filtre  $RC$  précédemment étudié avec  $\omega_0 = 100 \text{ rad.s}^{-1}$ .

#### → Signal sinusoïdal de moyenne non nulle

On impose en entrée du filtre le signal :  $e(t) = 3 + 2 \cos(\omega t)$  et on observe le signal en sortie, avec  $\omega$  successivement égale à  $10 \text{ rad.s}^{-1}$  et  $1,0 \times 10^3 \text{ rad.s}^{-1}$ .



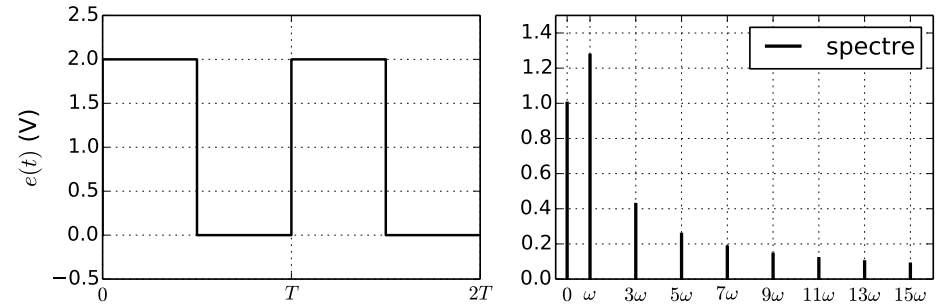
Le signal de sortie a pour expression :

$$s(t) = 3 + \frac{2}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_0)^2}} \cos(\omega t + \varphi(\omega))$$

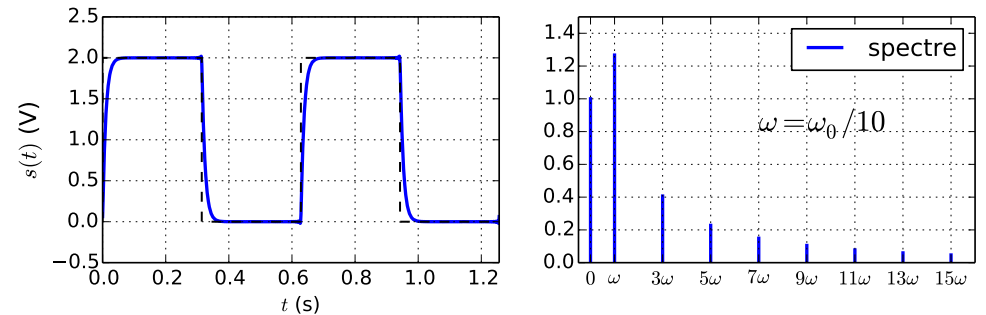
Pour  $\omega = \omega_0/10$ , le signal de sortie est quasiment identique au signal d'entrée. Pour  $\omega = 10 \times \omega_0$ , la composante sinusoïdale est très atténuée en sortie du filtre, le signal de sortie se limite quasiment à sa composante continue.

#### → Signal créneau de moyenne non nulle

On attaque maintenant le filtre par le signal créneau suivant :



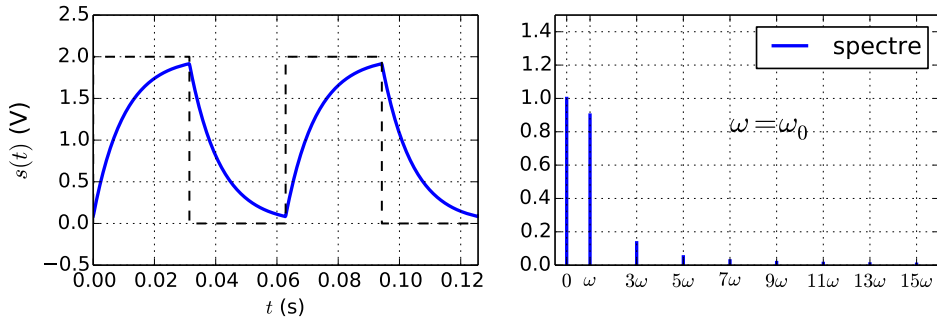
Pour des pulsations fondamentales du signal créneau respectivement égales à  $\omega_1 = 10 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $\omega_2 = 100 \text{ rad.s}^{-1}$  et  $\omega_3 = 1000 \text{ rad.s}^{-1}$ , on observe l'allure du signal de sortie et le contenu de son spectre en fréquence



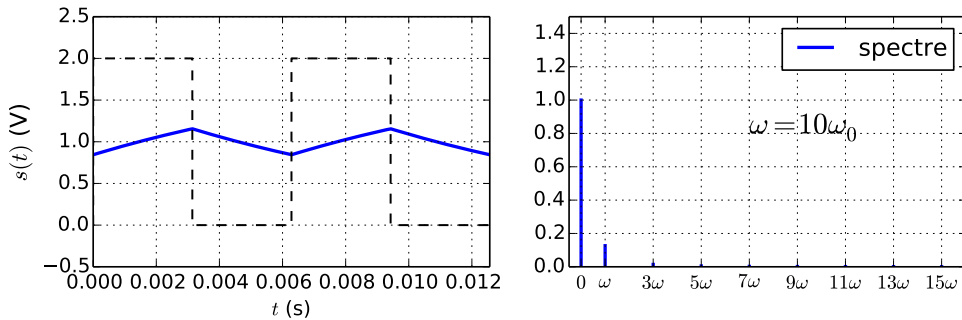
Pour une pulsation fondamentale  $\omega_1 \ll \omega_0$ , le signal de sortie est peu différent du signal d'entrée, seules les harmoniques de pulsation élevées sont atténuées ce qui se ressent sur les variations brutales du signal.

En terme temporel,  $\omega_1 \ll \omega_0 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{T_1} \ll \frac{1}{RC}$  donne  $T_1 \gg 2\pi RC$ . Cela signifie que la période du créneau est grande devant la constante de temps du circuit  $RC$ , le condensateur a le temps de se charger et de se décharger complètement à chaque

demi-période.



Pour  $\omega = \omega_2 = \omega_0$ , seules la valeur moyenne et la fréquence fondamentale sont préservées.



Pour  $\omega = \omega_3 = 10\omega_0$ , seule la valeur moyenne reste intacte.

Un filtre passe-bas dont la fréquence de coupure est très inférieure à la fréquence fondamentale du signal se comporte en filtre **moyen**.

Dans le dernier cas de figure étudié, les pulsations du fondamental et des harmoniques sont toutes très grandes vis à vis de la pulsation  $\omega_0$ , en conséquence :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{1}{1 + j\omega/\omega_0} \simeq \frac{1}{j\omega/\omega_0} \Rightarrow j\omega \underline{u}_s = \omega_0 \underline{u}_e$$

C'est à dire en notation temporelle :  $\frac{du_s}{dt} = \omega_0 u_e \Rightarrow u_s(t) = \omega_0 \int u_e(t) dt$

Un filtre passe-bas du premier ordre se comporte en **intégrateur** pour tout signal de pulsation très supérieure à la pulsation de coupure du filtre.

Ainsi dans le cas du signal créneau, on observe en sortie un signal triangulaire autour de la valeur moyenne.

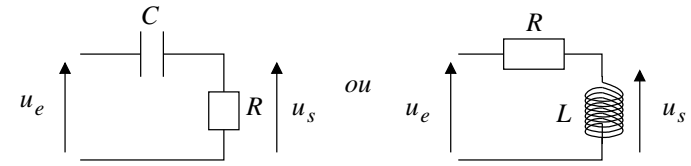
En effet, sur chaque demi-période du créneau, le signal d'entrée est une constante, alternativement positive et négative, on obtient donc en sortie, par intégration, des portions affines de pente alternativement positive et négative.

### 3 Modèles simples de filtres passifs

#### 3.1 Filtre passe-bas d'ordre 1 (Cf. paragraphe précédent)

#### 3.2 Filtre passe-haut d'ordre 1

##### Exemples de montage



##### Fonction de transfert

À l'aide de la formule du diviseur de tension, on obtient :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{j\omega/\omega_0}{1 + j\omega/\omega_0}$$

avec  $\omega_0 = \frac{1}{RC}$  pour le premier montage et  $\omega_0 = R/L$  pour le second.

Pour un signal de pulsation  $\omega \ll \omega_0$ , la fonction de transfert se simplifie selon :

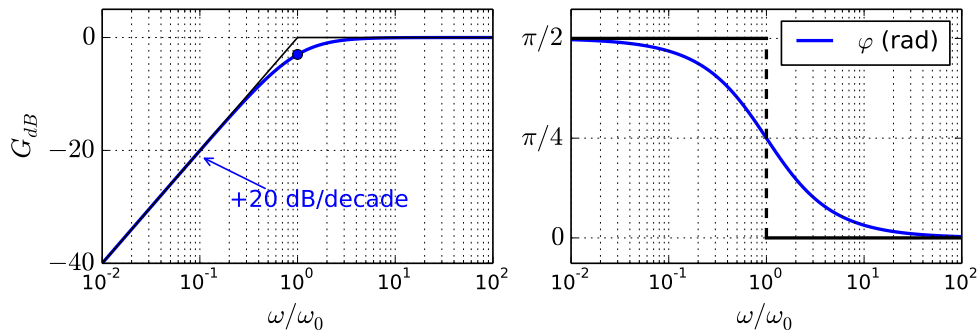
$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} \simeq j \frac{\omega}{\omega_0} \Rightarrow \underline{u}_s = \frac{1}{\omega_0} j\omega \underline{u}_e$$

C'est à dire, en notation temporelle :  $u_s(t) = \frac{1}{\omega_0} \frac{du_e}{dt}$

Un filtre passe-haut du premier ordre se comporte en **dérivateur** pour tout signal de pulsation très inférieure à la pulsation caractéristique du filtre.

##### Diagramme de Bode

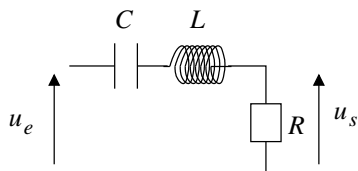
$$G_{dB} = 20 \log \left( \frac{\omega/\omega_0}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_0)^2}} \right) \quad \text{et} \quad \varphi = \pi/2 - \arctan(\omega/\omega_0)$$



La pente à +20 dB/décade est caractéristique d'un comportement dérivateur, le diagramme de la phase se déduit du diagramme de phase du filtre passe-bas d'ordre 1 par une translation de  $+\pi/2$ .

### 3.3 Filtre passe-bande d'ordre 2

#### Exemple de montage



#### Fonction de transfert

À l'aide de la formule du diviseur de tension, on obtient :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{j\omega/(Q\omega_0)}{1 + j\omega/(Q\omega_0) + (j\omega/\omega_0)^2} = \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

avec, pour le montage proposé,  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  et  $Q = \frac{L\omega_0}{R}$ .

Pour un signal de pulsation  $\omega \ll \omega_0$ , la fonction de transfert se simplifie selon :

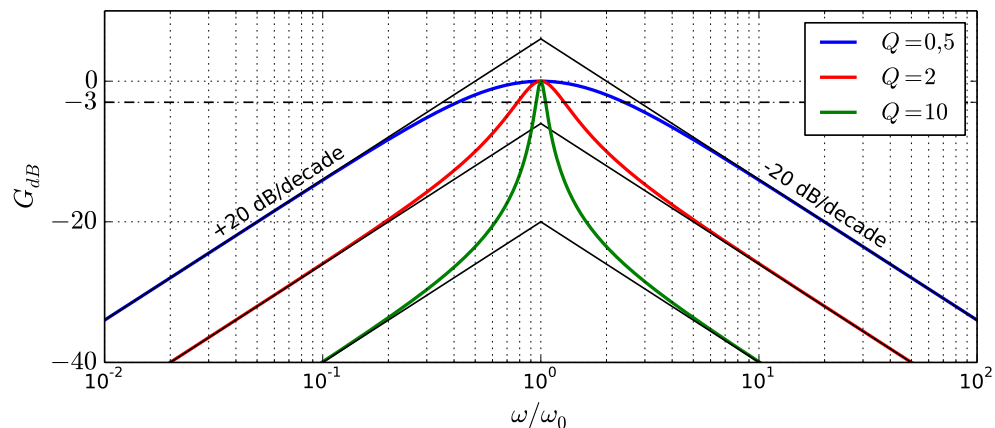
$$\underline{H}(j\omega) \simeq \frac{j\omega}{Q\omega_0} \Rightarrow \text{caractère dérivateur}$$

Pour un signal de pulsation  $\omega \gg \omega_0$ , la fonction de transfert se simplifie selon :

$$\underline{H}(j\omega) \simeq \frac{\omega_0}{jQ\omega} \Rightarrow \text{caractère intégrateur}$$

#### Diagramme de Bode

$$G_{dB} = -10 \log \left( 1 + Q^2 \left[ \omega/\omega_0 - \omega_0/\omega \right]^2 \right) \quad \text{et} \quad \varphi = -\arctan \left( Q \left[ \omega/\omega_0 - \omega_0/\omega \right] \right)$$



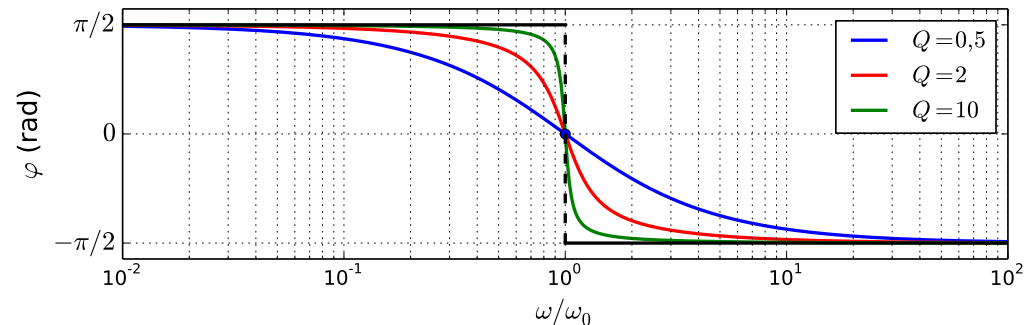
On retrouve, à basse fréquence le caractère dérivateur (pente à +20 dB/décade), et à haute fréquence le caractère intégrateur (pente à -20 dB/décade).

Le gain maximal est indépendant du facteur de qualité et vaut  $G_{dB}^{max} = 0$  pour  $\omega = \omega_0$ .

Le filtre sélectionne les pulsations voisines de  $\omega_0$ , le pic est d'autant plus prononcé que le facteur de qualité a une valeur élevée.

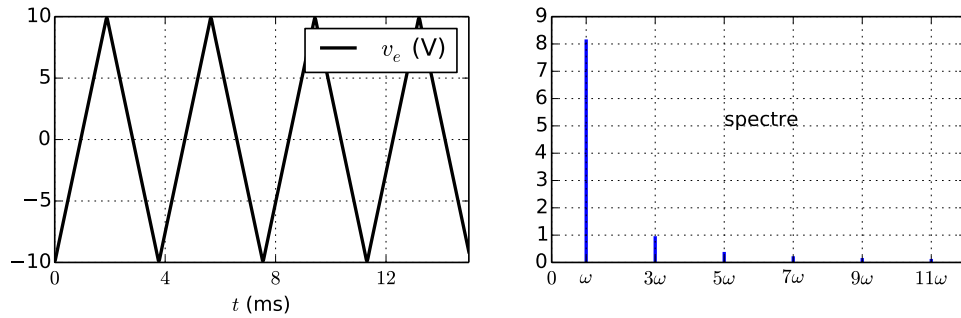
On appelle **bande passante**, notée  $\Delta\omega$ , le domaine des pulsations pour lesquelles  $G(\omega) \geq G_{max}/\sqrt{2}$ , on montre que :

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

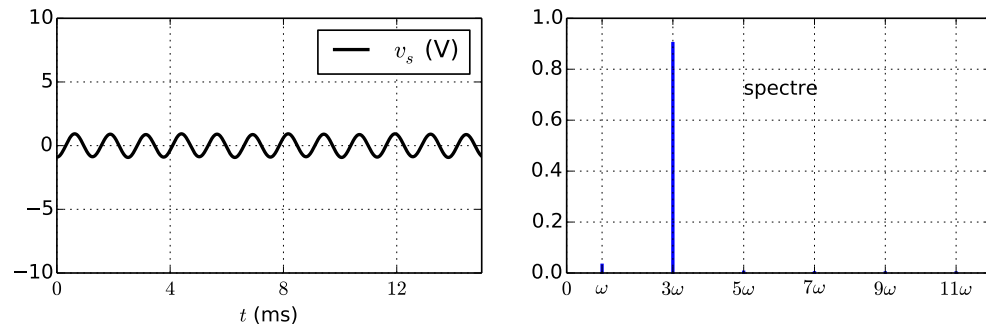


## Application : tripleur de fréquence

On considère en entrée du filtre le signal triangulaire suivant, de pulsation fondamentale  $\omega = 1,67 \times 10^3 \text{ rad.s}^{-1}$ .



Le filtre est le filtre passe-bande précédemment étudié avec  $\omega_0 = 5,0 \times 10^3 \text{ rad.s}^{-1}$  et  $Q = 10$ .

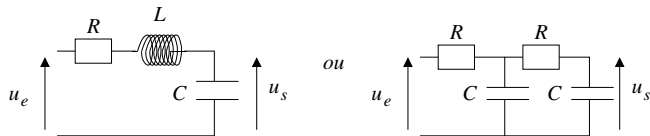


Comme  $\omega_0 = 3\omega$ , le filtre passe-bande sélectionne l'harmonique de rang 3, la valeur importante du facteur de qualité  $Q = 10$ , soit  $\Delta\omega = \omega_0/Q = 500 \text{ rad.s}^{-1}$  assure que toutes les autres harmoniques sont éliminées.

On obtient donc en sortie l'harmonique de rang 3, c'est à dire un signal sinusoïdal de pulsation  $3\omega$ .

## 3.4 Filtre passe-bas du deuxième ordre

### Exemples de montage



## Fonction de transfert

La fonction de transfert se met sous la forme canonique :

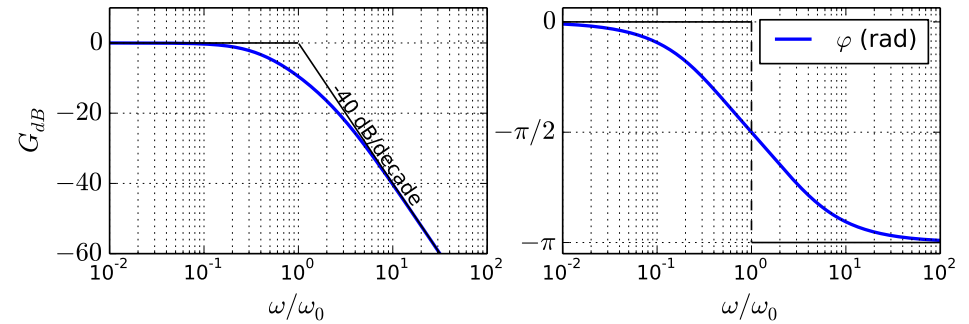
$$H(j\omega) = \frac{1}{1 - x^2 + jx/Q}$$

avec  $x = \omega/\omega_0$  et, pour le montage de droite  $\omega_0 = \frac{1}{RC}$  et  $Q = 1/3$ .

## Diagramme de Bode

$$G_{dB} = -10 \log \left( [1 - x^2]^2 + x^2/Q^2 \right),$$

$$\forall x < 1 \varphi(x) = -\arctan \left( \frac{x}{Q(1 - x^2)} \right); \quad \forall x > 1 \varphi(x) = -\pi - \arctan \left( \frac{x}{Q(1 - x^2)} \right)$$



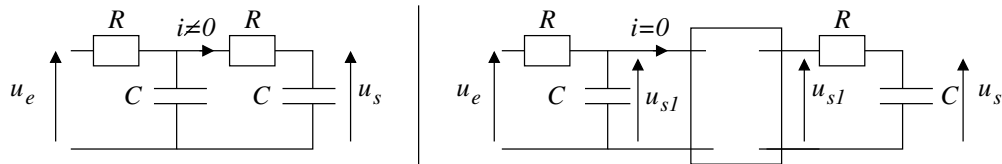
Dans le cas d'un filtre passe-bas du deuxième ordre, on obtient pour les hautes fréquences une pente à **-40 dB/décade**, chaque fois que la fréquence est multipliée par un facteur 10, le gain réel est divisé par 100. Un filtre passe-bas du deuxième ordre est alors deux fois plus efficace qu'un filtre du premier ordre.

## Montages en cascade

Le montage proposé correspond à la mise en cascade de deux filtres  $RC$  du premier ordre, cependant la fonction de transfert de l'ensemble n'est pas le produit des fonctions de transfert de chacun des filtres pris séparément.

$$\frac{1}{1 - x^2 + jQ/x} \neq \left( \frac{1}{1 + jx} \right) \times \left( \frac{1}{1 + jx} \right)$$

En effet, lors de la mise en cascade des deux filtres, le second prélève un courant et la fonction de transfert du premier s'en trouve modifiée.



Sur le schéma de droite, on a interposé entre les deux filtres un dispositif possédant :

- **une très grande résistance d'entrée** : il ne prélève pas de courant en amont,
- **une très faible résistance de sortie** : la tension qu'il délivre est indépendante du montage en aval.

La fonction de transfert du montage est alors le produit des fonctions de transferts :

$$\underline{H} = \frac{u_s}{u_e} = \frac{u_s}{u_{s1}} \times \frac{u_{s1}}{u_e} = \underline{H}_1 \times \underline{H}_2$$

\*\*\*\*\*

### Capacités exigibles

→ Signaux périodiques.

Savoir que l'on peut décomposer un signal périodique en une somme de fonctions sinusoïdales.

Définir la valeur moyenne et la valeur efficace.

Savoir que le carré de la valeur efficace d'un signal périodique est la somme des carrés des valeurs efficaces de ses harmoniques.

→ Fonction de transfert harmonique. Diagramme de Bode.

Utiliser une fonction de transfert donnée d'ordre 1 ou 2 et ses représentations graphiques pour conduire l'étude de la réponse d'un système linéaire à une excitation sinusoïdale, à une somme finie d'excitations sinusoïdales, à un signal périodique.

**Mettre en œuvre un dispositif expérimental illustrant l'utilité des fonctions de transfert pour un système linéaire à un ou plusieurs étages.**

Utiliser les échelles logarithmiques et interpréter les zones rectilignes des diagrammes de Bode d'après l'expression de la fonction de transfert.

→ Notion de gabarit.

Établir le gabarit d'un filtre en fonction du cahier des charges.

→ Modèles simples de filtres passifs.

passé-bas et passé-haut d'ordre 1, passé-bas et passé-bande d'ordre 2

Expliciter les conditions d'utilisation d'un filtre afin de l'utiliser comme moyennneur, intégrateur, ou dérivateur.

Comprendre l'intérêt, pour garantir leur fonctionnement lors de mises en cascade, de réaliser des filtres de tension de faible impédance de sortie et forte impédance d'entrée.

Approche documentaire : expliquer la nature du filtrage introduit par un dispositif mécanique (sismomètre, amortisseur, accéléromètre...).

**Étudier le filtrage linéaire d'un signal non sinusoïdal à partir d'une analyse spectrale.**

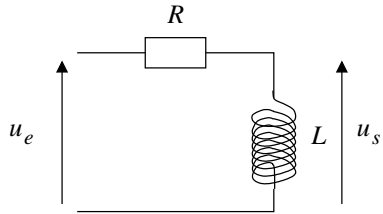
**Détecter le caractère non linéaire d'un système par l'apparition de nouvelles fréquences.**



Applications directes :

### AD 1. Filtre $RL$

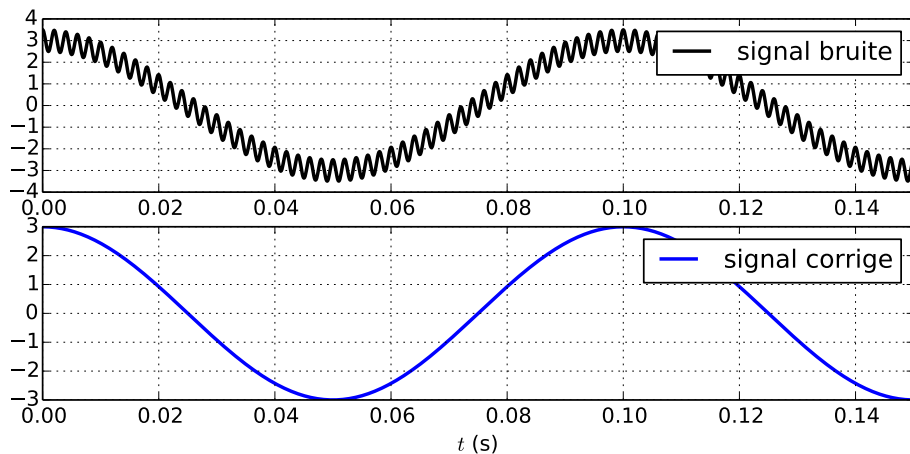
On considère le filtre suivant :



1. Déterminer, sans calcul, la nature du filtre.
2. Exprimer la fonction de transfert sous la forme :
$$\underline{H}(jx) = \frac{jx}{1 + jx}$$
avec  $x = \omega/\omega_0$  et  $\omega_0$  à exprimer en fonction de  $R$  et  $L$ .
3. Tracer le diagramme de Bode asymptotique pour le gain.
4. On donne  $L = 0,10$  H et  $R = 1,0$  k $\Omega$  et on considère en entrée un signal de la forme  $e(t) = E_0 \cos(2\pi \times 10 \times t)$  avec  $E_0 = 10$  V.  
Déterminer, sans calcul excessif, les caractéristiques du signal de sortie (amplitude et déphasage par rapport au signal d'entrée).

### AD 2. Signal parasité

On présente ci-dessous un signal parasité et le signal corrigé.



Proposer un filtre permettant de passer du signal parasité au signal corrigé.  
On précisera les valeurs des composants utilisés.