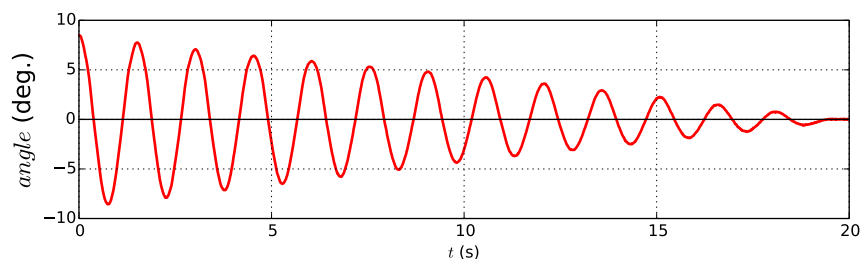
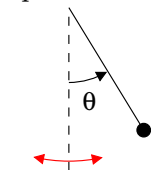


## Oscillateurs amortis

### 1 Présentation expérimentale

#### 1.1 Oscillateur mécanique, exemple d'un pendule

On s'intéresse aux oscillations d'un pendule en présence d'un frottement fluide.

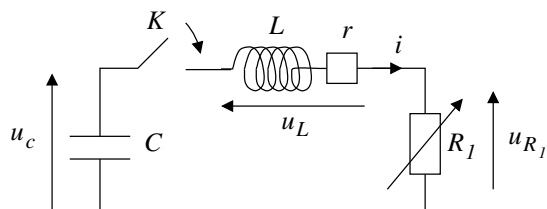


On observe des oscillations amorties, on parle de régime pseudo-périodique.

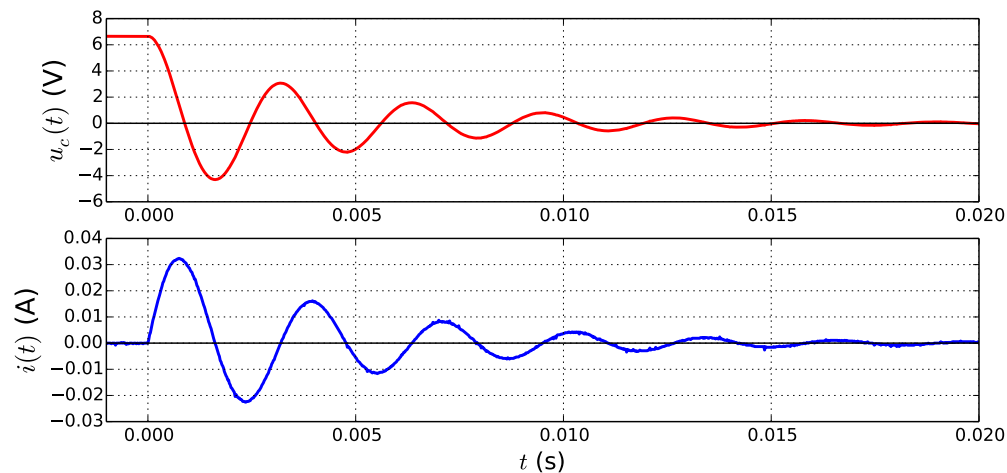
#### 1.2 Oscillateur électrique, circuit RLC série

On considère le régime libre d'évolution d'un circuit RLC, c'est à dire la décharge d'un condensateur au sein d'une association série comprenant une bobine (inductance  $L \simeq 50$  mH, résistance  $r = 8,75 \Omega$ ), un condensateur de capacité  $C$  et un conducteur ohmique de résistance  $R_1$  variable.

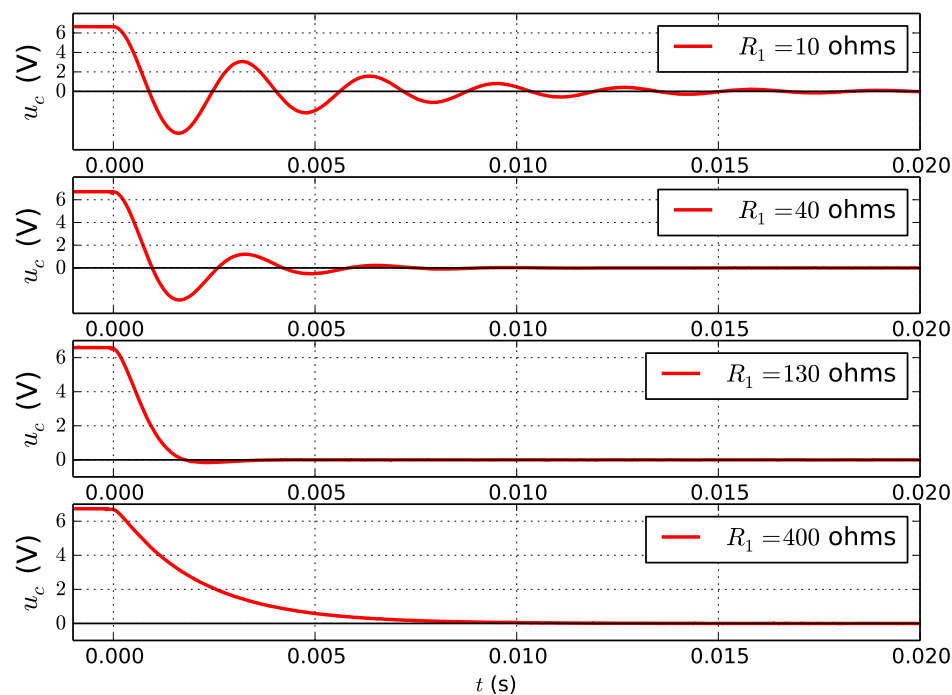
Le condensateur étant initialement chargé, à  $t = 0$ , on ferme l'interrupteur.



On réalise une première expérience avec  $C = 5,0 \mu\text{F}$  et  $R_1 = 10 \Omega$ .



On réalise une nouvelle série d'expériences pour différentes valeurs de la résistance  $R_1$ .



### 1.3 Analyse énergétique

#### Oscillateur mécanique

Pour le pendule, on observe des oscillations qui résultent d'un échange entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle.

Du fait du frottement fluide, l'énergie mécanique diminue au cours du temps, les oscillations sont amorties.

#### Oscillateur électrique

→ Dans le cas du circuit RLC, les deux formes d'énergie échangées sont l'énergie électrostatique du condensateur et l'énergie magnétique de la bobine. On observe ainsi des oscillations électriques.

→ L'énergie électrique du système est progressivement dissipée par effet Joule dans la résistance.

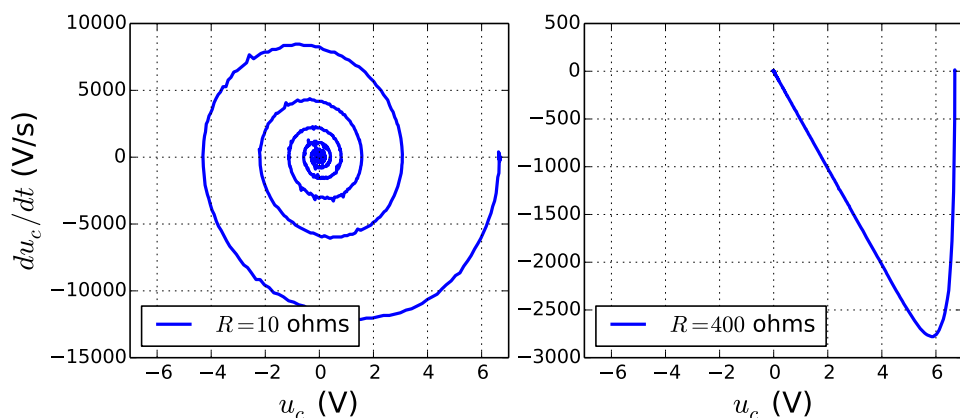
→ La première expérience fait apparaître deux temps caractéristiques :  $T$  la période des oscillations et  $\tau$  une constante de temps associée à l'amortissement.

Pour une résistance  $R_1$  suffisamment « faible »,  $\tau \gg T$  et il est possible d'observer des oscillations amorties, on parle de régime **pseudo-périodique**.

Avec l'augmentation de la valeur de la résistance, les oscillations disparaissent, on parle de régime **apériodique**.

### 1.4 Portraits de phase

Le portrait de phase de l'oscillateur électrique consiste à représenter  $\frac{du_c}{dt}$  en fonction de  $u_c$ .



→ Partant de l'état initial  $u_c(0^+) \simeq 6,5$  V et  $i(0^+) = 0$  A, la trajectoire de phase converge vers l'état final caractérisé par une tension et une intensité nulles.

→ Dans le cas du régime pseudo-périodique, la trajectoire s'enroule autour de l'état final, on retrouve les oscillations amorties.

Pour le régime apériodique, la trajectoire converge directement vers l'état final.

## 2 Étude théorique de l'oscillateur électrique amorti

### 2.1 Équation différentielle vérifiée par $u_c$

On applique la loi des mailles pour ce circuit série :

$$u_c = u_{R_1} + u_L$$

Les caractéristiques des dipôles s'écrivent :

$$i = -C \frac{du_c}{dt} \quad ; \quad u_{R_1} = R_1 i \quad \text{et} \quad u_L = L \frac{di}{dt} + r i$$

En utilisant ces relations, on obtient une équation différentielle ne portant que sur la tension  $u_c$  (avec  $R = R_1 + r$ ) :

$$u_c = -RC \frac{du_c}{dt} - LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} \Leftrightarrow \frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_c}{dt} + \frac{1}{LC} u_c = 0$$

On introduit :

$$\star \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ la pulsation propre,}$$

$$\star Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}, \text{ le facteur de qualité.}$$

On peut alors écrire l'équation différentielle sous sa forme canonique :

$$\forall t > 0, \quad \frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_c}{dt} + \omega_0^2 u_c = 0$$

### 2.2 Résolution de l'équation différentielle

On résout cette équation différentielle en prenant pour les composants  $C = 5,0 \mu\text{F}$ ,  $L = 50 \text{ mH}$  et  $R = R_1 + r \simeq 19 \Omega$ .

*Nature du régime*

Avec les valeurs proposées :  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2,0 \times 10^3 \text{ rad.s}^{-1}$  ;  $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \simeq 5,3$

Avec  $Q > 1/2$ , le régime est pseudo-périodique :

★ pseudo-période :  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0} \times \frac{2Q}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \simeq 3,2 \text{ ms}$

★ temps caractéristique d'amortissement :  $\tau = \frac{2Q}{\omega_0} = 5,3 \text{ ms}$

En l'absence de second membre, la solution s'identifie à la solution homogène :

$$u_c(t) = \exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right) [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)]$$

### Détermination des constantes d'intégration

On détermine les constantes d'intégration à l'aide des conditions initiales :

★ le condensateur est initialement chargé sous une tension  $U_0$ , la continuité de la tension aux bornes du condensateur assure que  $u_c(0^+) = u_c(0^-) = U_0$  (eq. 1).

★ Tant que l'interrupteur est ouvert, l'intensité du courant est nulle dans le circuit, la présence de la bobine assure la continuité de l'intensité à la fermeture du circuit :

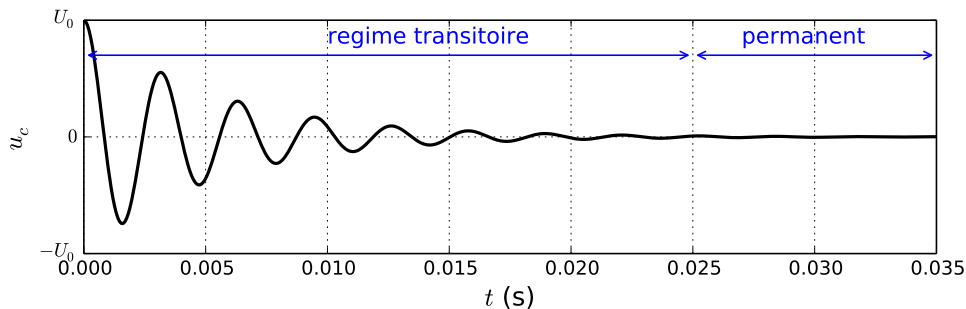
$$i(0^+) = i(0^-) = 0 \Rightarrow \frac{du_c}{dt}(0^+) = 0 \quad (\text{eq. 2})$$

Les deux conditions (eq. 1) et (eq. 2) sont équivalentes au système d'équations :

$$U_0 = A \quad \text{et} \quad -\frac{\omega_0}{2Q}A + \omega B = 0$$

Avec  $\omega = \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2 - 1}$ , on en déduit :

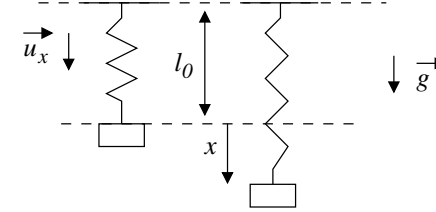
$$\forall t \geq 0, \quad u_c(t) = U_0 e^{-\omega_0 t / (2Q)} \left[ \cos(\omega t) + \frac{1}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \sin(\omega t) \right]$$



## 3 Étude théorique d'un oscillateur mécanique amorti

### 3.1 Présentation du dispositif

On considère un système masse-ressort vertical. La masse  $m$  est attachée à un ressort de constante de raideur  $k$  et de longueur à vide  $l_0$ . Le système est soumis à une force de frottement fluide  $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$ . On lâche la masse pour un allongement initialement nul.



### 3.2 Équation différentielle vérifiée par l'allongement

Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, on applique la deuxième loi de Newton à la masse qui est soumise à la tension du ressort, à son poids et à la force de frottement fluide; en projection selon l'axe  $(Ox)$ , on obtient :

$$m\ddot{x} = mg - kx - \alpha\dot{x} \Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = g$$

Avec  $\omega_0^2 = k/m$  et  $\alpha/m = \omega_0/Q$ , l'équation différentielle prend sa forme canonique :

$$\forall t > 0, \quad \ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = g$$

### 3.3 Résolution de l'équation différentielle

Faisons l'hypothèse d'un régime critique, c'est à dire  $Q = 1/2$ ; la solution est la somme de la solution homogène et de la solution particulière avec second membre :

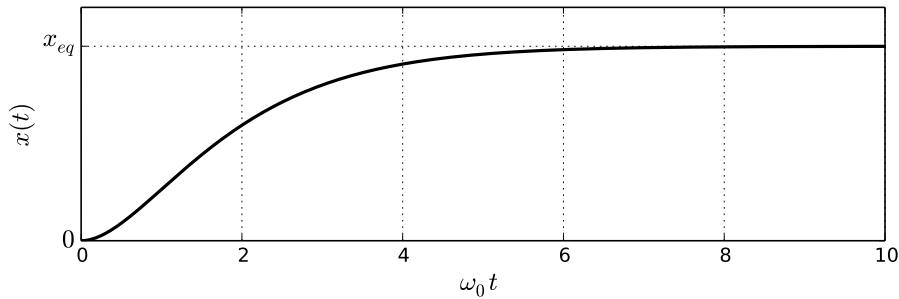
$$x(t) = (A \times t + B) e^{-\omega_0 t} + x_p \quad \text{avec} \quad x_p = x_{eq} = \frac{mg}{k}$$

La solution particulière est la solution du régime permanent pour lequel le poids et la tension du ressort se compensent.

Les conditions initiales  $x(0^+) = 0$  et  $v(0^+) = 0$  imposent :

$$0 = B + x_{eq} \quad \text{et} \quad A - \omega_0 B = 0$$

On en déduit finalement :  $\forall t \geq 0, \quad x(t) = x_{eq} - x_{eq}(1 + \omega_0 t) e^{-\omega_0 t}$ .



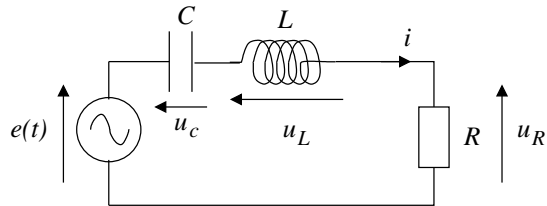
## 4 Régime sinusoïdal forcé

On s'intéresse à la réponse d'un système linéaire soumis à une excitation sinusoïdale.

### 4.1 Exemple

On considère un oscillateur amorti, électrique ou mécanique, que l'on soumet à une excitation sinusoïdale.

Ainsi, dans le cas du circuit *RLC* série, on ajoute un GBF qui délivre une tension sinusoïdale de la forme  $e(t) = E \cos(\omega t)$ .



La tension  $u_c$  est alors solution de l'équation différentielle :

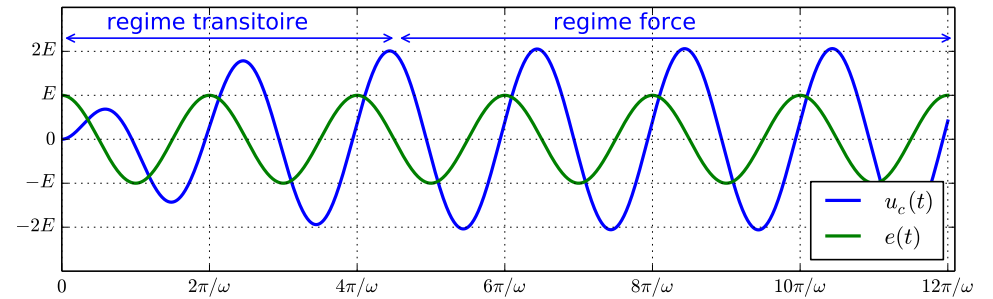
$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_c}{dt} + \omega_0^2 u_c = \omega_0^2 E \cos(\omega t)$$

La solution de cette équation est la somme de la solution homogène et d'une solution particulière avec second membre :

$$u_c(t) = u_h(t) + u_p(t)$$

La solution  $u_h$  est associée au régime transitoire et s'atténue « rapidement » en une durée de l'ordre de  $Q/\omega_0$  pour laisser place au **régime forcé**.

La résolution numérique de l'équation précédente montre, qu'à la suite du régime transitoire, un régime forcé s'établit.



La réponse du système linéaire est sinusoïdale de même fréquence que l'excitation, la réponse présentant *a priori* un déphasage et une différence d'amplitude par rapport à l'excitation.

$$\text{En régime forcé, } u_c(t) = U_c \cos(\omega t + \varphi)$$

### 4.2 Représentation complexe des grandeurs sinusoïdales

Soit  $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$  une grandeur sinusoïdale, on définit :

→ sa **représentation complexe**  $\underline{x}(t) = X_m e^{j(\omega t + \varphi)}$  avec  $\mathcal{R}_e[\underline{x}(t)] = x(t)$

→ son **amplitude complexe**  $\underline{X}_m = X_m e^{j\varphi}$  avec  $\underline{x}(t) = \underline{X}_m e^{j\omega t}$

La connaissance de l'amplitude complexe permet de caractériser complètement  $x(t)$ , en effet :

$$|\underline{X}_m| = X_m \quad \text{et} \quad \varphi = \arg(\underline{X}_m)$$

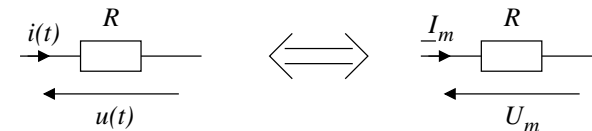
### 4.3 Impédances complexes

Soit un dipôle linéaire fonctionnant en régime sinusoïdal forcé avec  $\underline{U}_m$  et  $\underline{I}_m$  les amplitudes complexes de  $u(t)$  et  $i(t)$ . On appelle **impédance complexe** du dipôle, la grandeur notée  $\underline{Z}$  et définie en convention récepteur par :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{\underline{U}_m}{\underline{I}_m} \quad \text{avec} \quad |\underline{Z}| = \frac{U_m}{I_m} \quad \text{et} \quad \arg(\underline{Z}) = \arg(\underline{U}_m) - \arg(\underline{I}_m)$$

On définit également l'admittance complexe telle que  $\underline{Y} = 1/\underline{Z}$ .

**Impédance d'un conducteur ohmique :**

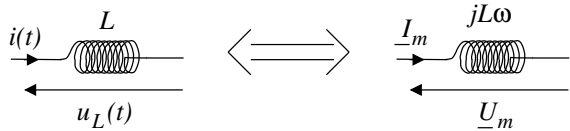


Pour un conducteur ohmique :

$$u(t) = Ri(t) \Leftrightarrow \underline{u}(t) = R\underline{i}(t) \Leftrightarrow \underline{U}_m = R\underline{I}_m$$

L'impédance d'un conducteur ohmique est réelle  $\underline{Z}_R = R$ , la tension et l'intensité du courant sont en phase.

**Impédance d'une bobine :**

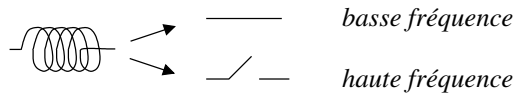


Pour une bobine :

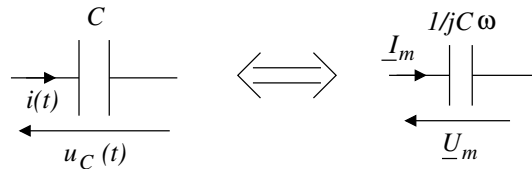
$$u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} \Leftrightarrow \underline{u}_L(t) = L \frac{d\underline{i}(t)}{dt} \Leftrightarrow \underline{U}_m = jL\omega \times \underline{I}_m$$

L'impédance d'une bobine est un imaginaire pur  $\underline{Z}_L = jL\omega$ , la tension et l'intensité du courant sont en quadrature, la tension a une avance de phase de  $+\pi/2$  par rapport à l'intensité du courant.

À basse fréquence :  $|\underline{Z}_L| \rightarrow 0$ ; À haute fréquence :  $|\underline{Z}_L| \rightarrow +\infty$



**Impédance d'un condensateur :**

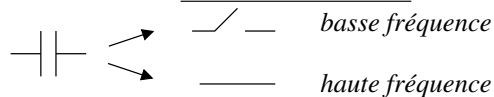


Pour un condensateur :

$$i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} \Leftrightarrow \underline{i}(t) = C \frac{d\underline{u}_C(t)}{dt} \Leftrightarrow \underline{I}_m = jC\omega \times \underline{U}_m$$

L'impédance d'un condensateur est un imaginaire pur  $\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$ , la tension et l'intensité du courant sont en quadrature de phase, la tension a un retard de phase de  $+\pi/2$  par rapport à l'intensité du courant.

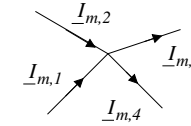
À basse fréquence :  $|\underline{Z}_C| \rightarrow +\infty$ ; À haute fréquence :  $|\underline{Z}_C| \rightarrow 0$



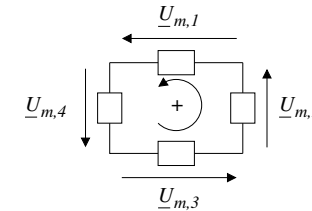
#### 4.4 Lois de l'électrocinétique en régime sinusoïdal forcé

Les lois obtenues en ARQS sont généralisables au régime sinusoïdal forcé à condition d'utiliser les amplitudes complexes et les impédances des dipôles.

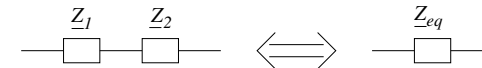
**Loi des nœuds :**  $\underline{I}_{m,1} + \underline{I}_{m,2} = \underline{I}_{m,3} + \underline{I}_{m,4}$



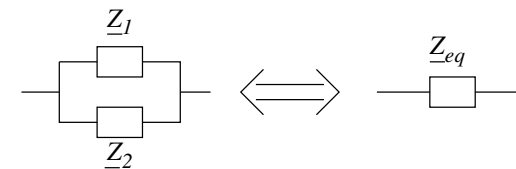
**Loi des mailles :**  $\underline{U}_{m,1} + \underline{U}_{m,2} + \underline{U}_{m,3} + \underline{U}_{m,4} = 0$



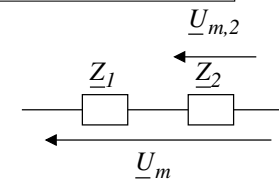
**Association de dipôles en série :**  $\underline{Z}_{eq} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$



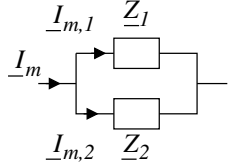
**Association de dipôles en parallèle :**  $\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2}$



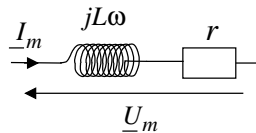
**Diviseur de tension :**  $\underline{U}_{m,2} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{U}_m$



**Diviseur de courant :** 
$$I_{m,2} = \frac{1/Z_2}{1/Z_1 + 1/Z_2} I_m$$

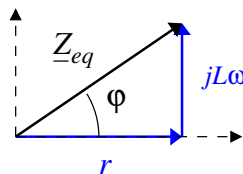
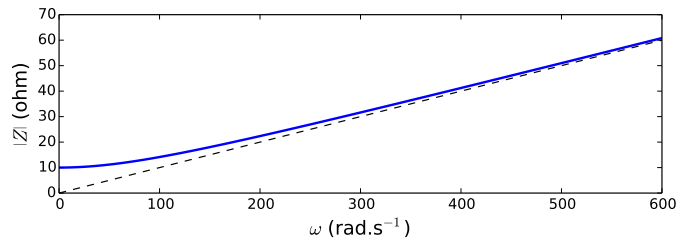


#### 4.5 Exemple : impédance complexe d'une bobine réelle



Pour cette association série :  $Z_{eq} = r + jL\omega$

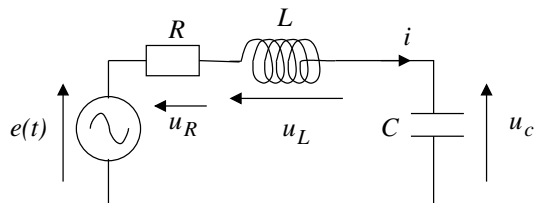
On en déduit (avec :  $\varphi = \arg(Z)$ ) :  $|Z_{eq}| = \sqrt{r^2 + (L\omega)^2}$  et  $\tan \varphi = \frac{L\omega}{r}$



## 5 Oscillateur soumis à une excitation sinusoïdale

### 5.1 Résonance en tension aux bornes du condensateur

On considère le circuit RLC série suivant soumis à une tension sinusoïdale délivrée par un GBF.

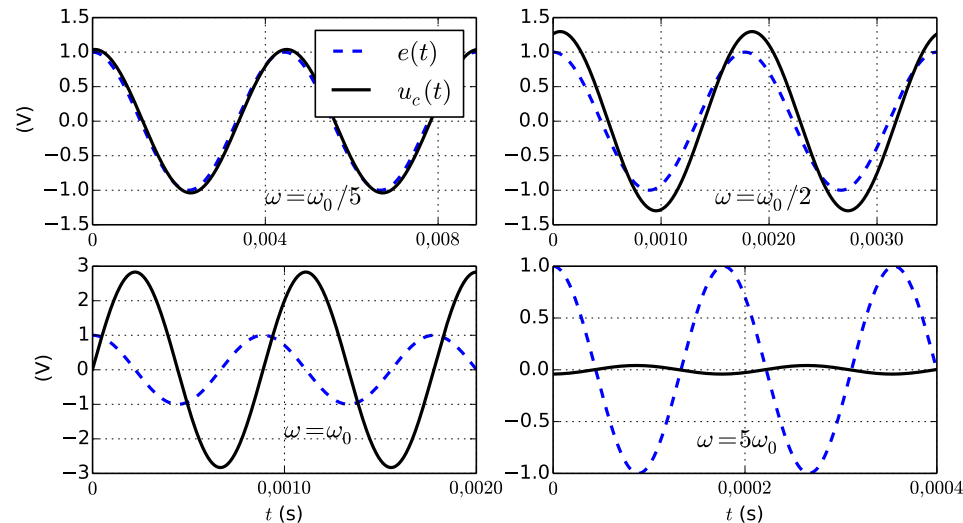


## Étude expérimentale

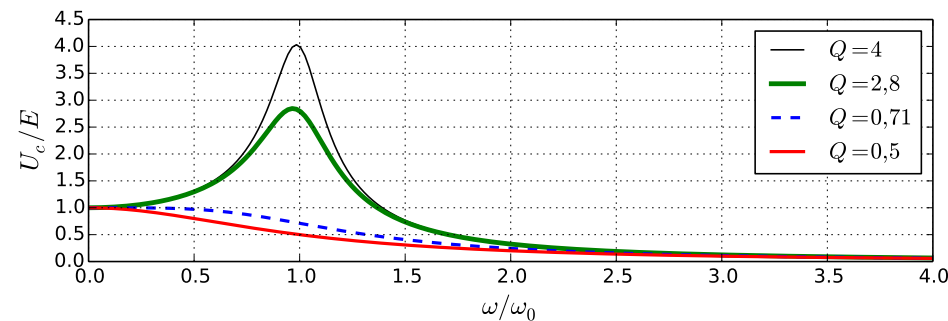
Les graphiques ci-dessous présentent la réponse en tension aux bornes du condensateur en fonction de la pulsation du signal d'entrée.

Les valeurs retenues sont  $L = 20 \text{ mH}$ ,  $C = 1,0 \mu\text{F}$  et  $R = 50 \Omega$ , ce qui implique  $\omega_0 \simeq 7,1 \times 10^3 \text{ rad.s}^{-1}$  et  $Q \simeq 2,8$ .

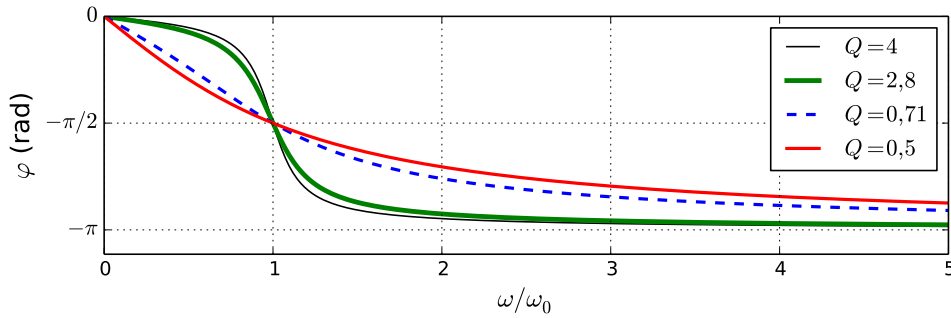
Le signal d'entrée de pulsation  $\omega$  vaut  $e(t) = E \cos(\omega t)$  avec  $E = 1,0 \text{ V}$ .



À partir de ces courbes, on peut obtenir le rapport des amplitudes des tensions du condensateur et de l'excitation en fonction de la pulsation pour différentes valeurs du facteur de qualité.



Et de même pour le déphasage entre la tension aux bornes du condensateur et la tension délivrée par le GBF :



→ Excité par une tension sinusoïdale, le système linéaire répond, en régime forcé, à la même fréquence, l'amplitude et la phase de la tension aux bornes du condensateur dépendant cependant de la fréquence d'excitation à facteur de qualité fixé.

→ À basse fréquence ( $\omega \ll \omega_0$ ), le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert, la tension d'entrée se reporte donc sur le condensateur, les deux tensions sont donc en phase et de même amplitude.

→ À haute fréquence ( $\omega \gg \omega_0$ ), le condensateur se comporte comme un fil, la tension aux bornes du condensateur tend vers zéro.

→ Pour des amortissements suffisamment faibles et un facteur de qualité supérieur à 0,71, l'amplitude de la tension du condensateur passe par un maximum, on parle de **résonance**.

Il y a **résonance** quand l'amplitude du signal passe par un maximum pour une pulsation nommée **pulsation de résonance**. Le phénomène est d'autant plus marqué, résonance piquée, que la valeur du facteur de qualité est élevée.

### Étude théorique

La formule du pont diviseur de tension mène, en notation complexe, à :

$$\frac{U_c}{E} = \frac{Z_c}{Z_c + Z_L + Z_R} E = \frac{1/(jC\omega)}{1/(jC\omega) + jL\omega + R} E$$

$$\frac{U_c}{E} = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega} \Rightarrow \boxed{\frac{U_c}{E} = \frac{1}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}} \text{ avec } x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

En effet,  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  et  $RC\omega = RC\omega_0 \times \frac{\omega}{\omega_0} = R\sqrt{\frac{C}{L}} \times \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{\omega}{Q\omega_0}$ .

### Étude de l'amplitude réelle

$$\frac{U_c}{E} = \left| \frac{U_c}{E} \right| = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + x^2/Q^2}}$$

On retrouve le fait que  $U_c/E \rightarrow 1$  à basse fréquence et  $U_c/E \rightarrow 0$  à haute fréquence.

Considérons l'application  $g : x \rightarrow (1-x^2)^2 + x^2/Q^2$  pour  $x \geq 0$ .

$$g'(x) = 2 \times (-2x) \times (1-x^2) + \frac{2x}{Q^2} = 2x \left[ \frac{1}{Q^2} - 2(1-x^2) \right]$$

La dérivée s'annule pour :

→  $x = 0$  (tangente horizontale à l'origine)

→  $x_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$  à condition que  $Q > \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0,71$ ; avec  $\frac{U_c}{E}(x_r) = \frac{Q}{\sqrt{1 - 1/4Q^2}}$

Pour  $Q > 1/\sqrt{2}$ , la tension du condensateur passe par une résonance; pour  $Q \gg 1$ ,  $\omega_r \simeq \omega_0$  et  $U_{c,max} \simeq QE$ .

### Étude du déphasage

$\varphi = \arg(\underline{U}_c) = -\arg\left[(1-x^2) + j\frac{x}{Q}\right]$ , on en déduit :

$$\forall x < 1, \varphi(x) = -\arctan\left(\frac{x}{Q(1-x^2)}\right); \quad \forall x > 1, \varphi = -\left[\pi + \arctan\left(\frac{x}{Q(1-x^2)}\right)\right]$$

### 5.2 Étude de la résonance en intensité

La loi des mailles, appliquée à ce circuit série et pour les grandeurs complexes, s'écrit :

$$E = \left(R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}\right) \underline{I} \Leftrightarrow \underline{I} = \frac{E}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}$$

On en déduit :

$$\underline{I} = \frac{E}{R} \times \frac{1}{1 + j\left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}\right)} \Rightarrow \underline{I} = \frac{E}{R} \times \frac{1}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

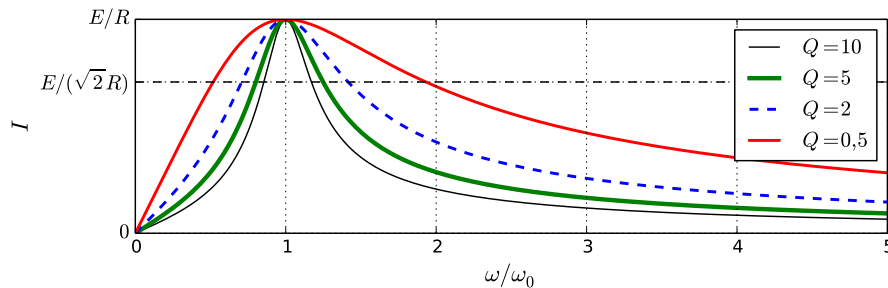
## Étude de l'amplitude réelle

$$I(x) = |\underline{I}|(x) = \frac{E}{R} \times \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2(x - 1/x)^2}}$$

→ Basse fréquence :  $x \rightarrow 0$ ,  $I \rightarrow 0$ , car le condensateur est alors équivalent à un interrupteur ouvert.

→ Haute fréquence :  $x \rightarrow +\infty$ ,  $I \rightarrow 0$ , car la bobine est alors équivalente à un interrupteur ouvert.

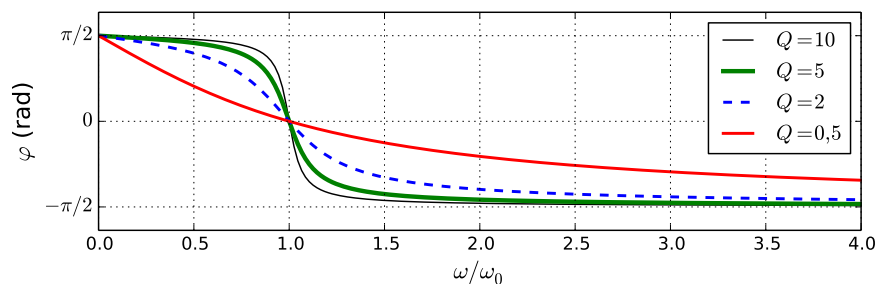
→ L'intensité admet un maximum pour  $x = 1$ , soit pour  $\omega = \omega_0$ .



## Étude du déphasage

$$\varphi(x) = \arg(\underline{I}) = -\arctan\left(Q\left[x - \frac{1}{x}\right]\right)$$

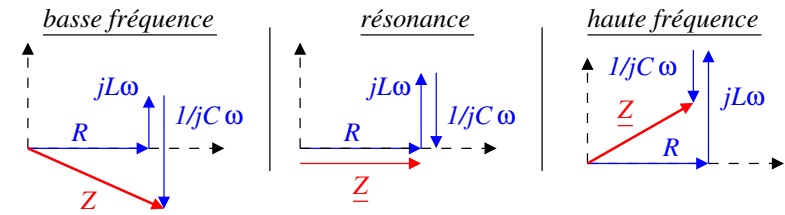
À la résonance,  $x = 1$ , l'impédance du circuit est réelle, l'intensité du courant et la tension du générateur sont en phase.



À l'aide d'un diagramme de Fresnel sur lequel on représente les impédances, on comprend aisément que l'impédance est réelle et minimale à la résonance, pour la pulsation propre  $\omega_0$  du système.

À la résonance l'impédance étant minimale, l'intensité est maximale ; l'impédance

étant réelle, l'intensité est en phase avec la tension.



## Bande passante et facteur de qualité

On appelle **bande passante**, les pulsations  $\omega$  pour lesquelles  $I(\omega) \geq \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}$

Dans le cas présent, cela revient à chercher les  $x$  tels que :  $I(x) \geq \frac{E}{R\sqrt{2}}$ .

La résolution peut être effectuée graphiquement sur la courbe ci-contre. On peut privilégier une étude algébrique et chercher les  $x$  qui vérifient :

$$I(x) = \frac{E}{R} \times \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2(x - 1/x)^2}} = \frac{E}{R\sqrt{2}} \Leftrightarrow Q^2(x - 1/x)^2 = 1$$

C'est à dire :

$$Q\left(x - \frac{1}{x}\right) = \pm 1 \Leftrightarrow x^2 \pm \frac{1}{Q}x - 1 = 0$$

Ces deux équations du second degré conduisent à quatre racines dont seulement deux sont positives :

$$x_1 = \frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{-1}{2Q} + \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{\omega_2}{\omega_0} = \frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}}$$

Ce qui donne pour la largeur de la bande passante :

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q} \Leftrightarrow \boxed{Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}}$$

La résonance est d'autant plus piquée que la valeur du facteur de qualité est élevée.



### Capacités exigibles

→ Circuit RLC série et oscillateur mécanique amorti par frottement visqueux.

**Mettre en évidence la similitude des comportements des oscillateurs mécanique et électronique.**

**Réaliser l'acquisition d'un régime transitoire du deuxième ordre et analyser ses caractéristiques**

Analyser, sur des relevés expérimentaux, l'évolution de la forme des régimes transitoires en fonction des paramètres caractéristiques.

Prévoir l'évolution du système à partir de considérations énergétiques.

Prévoir l'évolution du système en utilisant un portrait de phase fourni.

Écrire sous forme canonique l'équation différentielle afin d'identifier la pulsation propre et le facteur de qualité.

Connaître la nature de la réponse en fonction de la valeur du facteur de qualité.

Déterminer la réponse détaillée dans le cas d'un régime libre ou d'un système soumis à un échelon en recherchant les racines du polynôme caractéristique.

Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire, selon la valeur du facteur de qualité.

→ Régime sinusoïdal forcé, impédances complexes.

Établir et connaître l'impédance d'une résistance, d'un condensateur, d'une bobine en régime harmonique.

Remplacer une association série ou parallèle de deux impédances par une impédance équivalente.

→ Oscillateur électrique ou mécanique soumis à une excitation sinusoïdale. Résonance.

**Mettre en œuvre un dispositif expérimental autour du phénomène de résonance.**

Utiliser la construction de Fresnel et la méthode des complexes pour étudier le régime forcé.

À l'aide d'un outil de résolution numérique, mettre en évidence le rôle du facteur de qualité pour l'étude de la résonance en élongation.

Relier l'acuité d'une résonance forte au facteur de qualité.

Déterminer la pulsation propre et le facteur de qualité à partir de graphes expérimentaux d'amplitude et de phase.

Expliquer la complémentarité des informations présentes sur les graphes d'amplitude et de phase, en particulier dans le cas de résonance d'élongation de facteur

de qualité modéré.

**Mettre en œuvre une démarche expérimentale autour des régimes transitoires du premier ou du second ordre (flash, sismomètre, ...).**

## Annexe : résolution d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants

On considère une équation différentielle à coefficients constants de la forme :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 E$$

La solution est de la forme :  $u = u_p + u_h$  avec :

- $u_p$ , une solution particulière de l'équation avec second membre ;
- $u_h$ , la solution homogène, solution générale de l'équation sans second membre.

★ La solution particulière est n'importe quelle fonction solution de :

$$\frac{d^2u_p}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_p}{dt} + \omega_0^2 u_p = \omega_0^2 E$$

Avec un second membre constant, on recherche une solution constante,  $u_p(t) = E$  convient.

★ La solution homogène est la solution générale de :

$$\frac{d^2u_h}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_h}{dt} + \omega_0^2 u_h = 0$$

Pour trouver  $u_h$ , il faut déterminer les racines de l'équation caractéristique (équation déduite de l'équation différentielle sans second membre) :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$$

dont le discriminant vaut :  $\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = \frac{\omega_0^2}{Q^2} (1 - 4Q^2)$ .

— Le régime aperiodique :  $\Delta > 0 \Leftrightarrow Q < \frac{1}{2}$

Dans ce cas, les racines de l'équation sont toutes les deux négatives et valent  $r_{\pm} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}$ , soit :

$$r_{\pm} = \frac{\omega_0}{2Q} (-1 \pm \sqrt{1 - 4Q^2})$$

La solution générale sans second membre a alors la forme suivante :

$$u_h(t) = Ae^{r_+t} + Be^{r_-t}$$

— Le régime critique :  $\Delta = 0 \Leftrightarrow Q = \frac{1}{2}$

Dans ce cas, on obtient une racine double négative  $r_0 = -\frac{\omega_0}{2Q} = -\omega_0$ . La solution générale sans second membre a alors la forme suivante :

$$u_h(t) = (At + B) \times e^{r_0 t}$$

— Le régime pseudo-périodique :  $\Delta < 0 \Leftrightarrow Q > \frac{1}{2}$

Dans ce cas, on obtient deux racines complexes  $r_{\pm} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$ , soit :

$$r_{\pm} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega \quad \text{avec} \quad \omega = \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1}$$

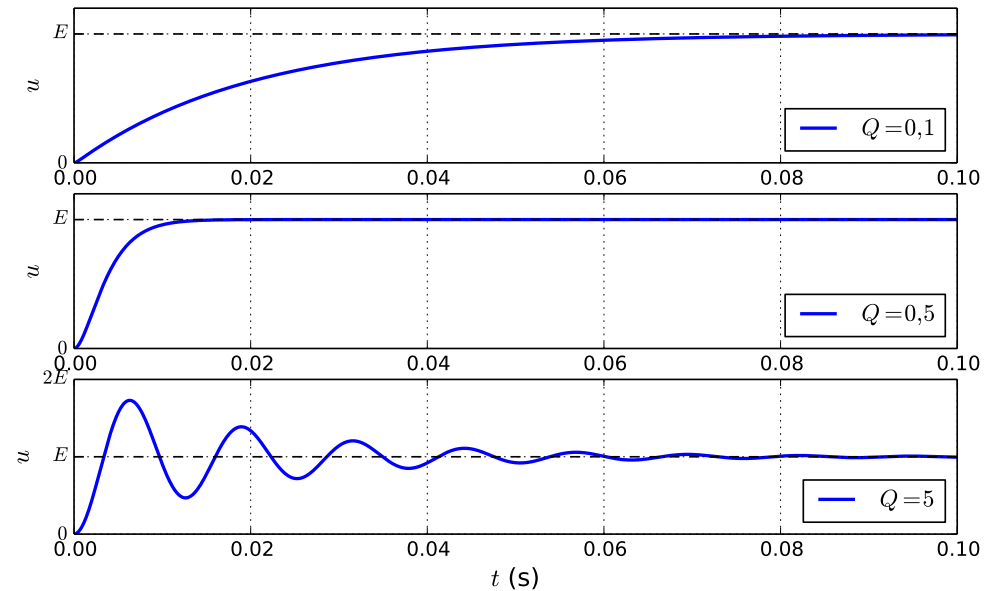
La solution générale sans second membre a alors la forme suivante :

$$u_h(t) = Ae^{r_+t} + Be^{r_-t} = Ae^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \cos(\omega t + \varphi) = e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} [A' \cos(\omega t) + B' \sin(\omega t)]$$

On observe une décroissance oscillante ; le régime pseudo-périodique est associé à un facteur de qualité important donc à un amortissement faible.

$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0} \times \frac{2Q}{\sqrt{4Q^2 - 1}}$  est la pseudo-période,  $\omega$  la pseudo-pulsation.

Les courbes ci-dessous présentent les solutions pour les trois régimes possibles avec  $\omega_0 = 500 \text{ rad.s}^{-1}$  et les conditions initiales  $u(0) = 0$  et  $u'(0) = 0$ .



Applications directes :

**AD 1.**

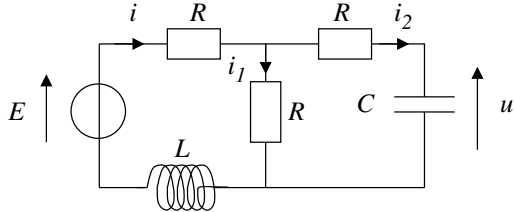
Un circuit  $R, L, C$  série soumis à un échelon de tension est parcouru par une intensité  $i(t)$  qui vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0$$

1. Dans le cas où  $R = 0 \Omega$ , comment l'intensité  $i(t)$  évolue-t-elle ?
2. On prend  $R = 100 \Omega$ ,  $L = 20 \text{ mH}$  et  $C = 100 \text{ nF}$ . Déterminer la nature du régime.
3. En conservant les mêmes valeurs pour  $L$  et  $C$ , quelle doit-être la valeur de  $R$  permettant d'observer un régime critique ?

**AD 2.**

On considère le circuit ci-dessous. Initialement le condensateur est déchargé et aucun courant ne circule dans la bobine.



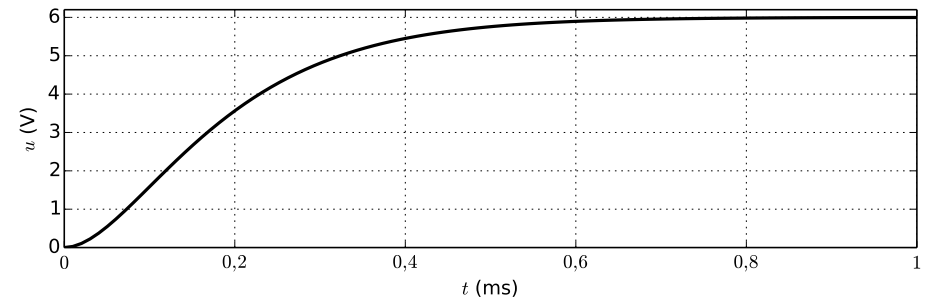
1. Déterminer, sans calcul lourd, les valeurs  $u_\infty$  et  $i_\infty$ , valeurs de  $u$  et  $i$  une fois le régime permanent atteint.
2. Grâce à une loi des mailles, exprimer  $i_1$ , l'intensité traversant la résistance centrale en fonction de  $u$ ,  $R$  et  $C$ .
3. Grâce à une loi des nœuds, en déduire l'expression de l'intensité  $i$  en fonction de  $u$ ,  $R$ ,  $C$ .
4. En appliquant une deuxième loi des mailles, montrer que l'équation différentielle en  $u(t)$  qui régit le système est donnée par :

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{3R}{L} + \frac{1}{RC} \right) \frac{du}{dt} + \frac{u}{LC} = \frac{E}{2LC}$$

5. On choisit les valeurs des composants de sorte que  $L = R^2 C$ . Simplifier l'équation différentielle en éliminant  $L$  au profit de  $R$  et  $C$ . Quel est le type de régime ?
6. Justifier que  $u(0^+) = 0$  et  $i(0^+) = 0$  puis montrer que  $\frac{du}{dt}(0^+) = 0$ .

7. En déduire complètement  $u(t)$ .

8. On donne l'allure de  $u(t)$  :



Donner la valeur numérique de  $E$ . En déduire la valeur de  $u(t)$  pour  $t = 4RC$  puis une valeur approchée de  $RC$  par lecture graphique.

**AD 3.**

On considère une bobine réelle d'inductance  $L = 10 \text{ mH}$  et de résistance interne  $r = 3,0 \Omega$ ; elle est soumise à une tension d'amplitude  $6,0 \text{ V}$  et de fréquence  $100 \text{ Hz}$ .

Déterminer l'amplitude de l'intensité qui traverse la bobine ainsi que le déphasage entre l'intensité et la tension.

**AD 4.**

On considère l'association série d'une bobine idéale d'inductance  $L = 20 \text{ mH}$  et d'une résistance  $R = 100 \Omega$ . L'ensemble est soumis à une tension sinusoïdale  $u(t)$  d'amplitude  $10,0 \text{ V}$  et de fréquence  $f = 1,0 \text{ kHz}$ .

Déterminer l'amplitude de la tension aux bornes de la résistance.

**AD 5.**

Quelle doit-être en fonction de  $C$  la valeur de la capacité du condensateur de la branche supérieure pour que l'intensité  $i_1(t)$  ait une amplitude égale à  $1/3$  de l'amplitude de  $i(t)$  ?

