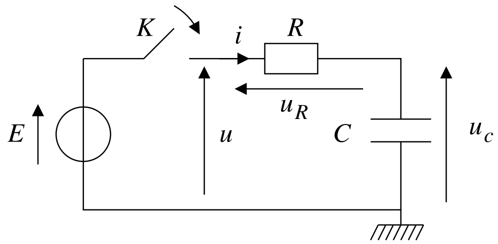
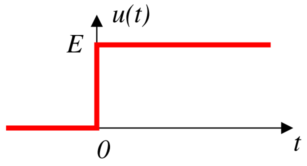
Circuit linéaire du premier ordre

1 Réponse d'un circuit RC série à un échelon de tension

On s'intéresse à la réponse d'une association série {conducteur ohmique, condensateur} que l'on soumet « brusquement » à une tension E constante.
Le condensateur est initialement déchargé, et on ferme l'interrupteur à $t = 0$.

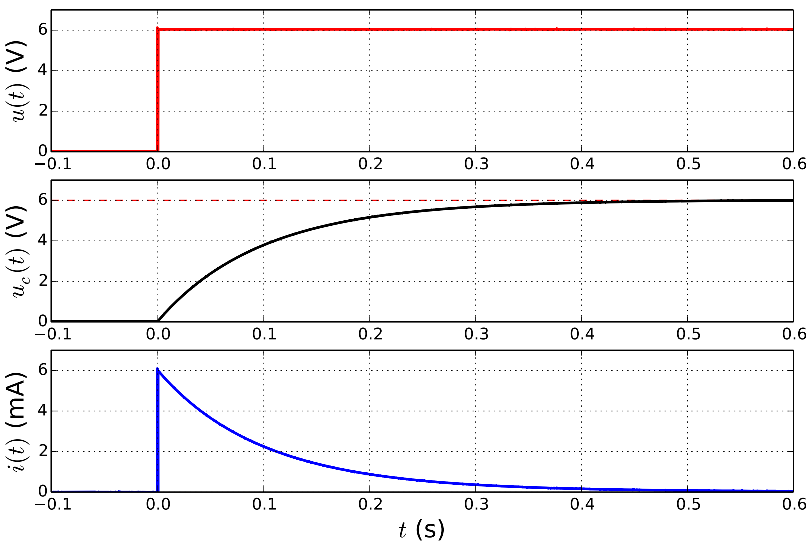
1.1 Montage





1.2 Résultats expérimentaux

On réalise une première expérience avec $R = 1,0$ kΩ, $C = 100$ μF et $E = 6,0$ V.



→ La tension u_c est continue en $t = 0$, le condensateur se charge, la tension augmente jusqu'à atteindre une valeur constante égale à E.

→ L'intensité du courant i est discontinue en $t = 0$; partant d'une valeur maximale en $t = 0^+$, l'intensité décroît pour s'annuler une fois le condensateur chargé.

→ On distingue, le **régime permanent**, une fois que les grandeurs ne dépendent plus du temps (ici pour $t > 0,5$ s) et le **régime transitoire** entre l'instant initial et le régime permanent.

1.3 Équation différentielle vérifiée par $u_c(t)$

On s'intéresse à l'évolution du circuit, une fois l'interrupteur fermé, $\forall t > 0$.

→ Loi d'additivité des tensions : $u = E = u_R + u_c$

→ Caractéristiques des dipôles : $u_R = Ri$ et $i = C\dfrac{du_c}{dt}$

On en déduit :

$$\boxed{\forall t > 0, \quad E = RC\frac{du_c}{dt} + u_c}$$

1.4 Analyse de l'équation différentielle

→ L'équation différentielle fait apparaître $\tau = RC$, la **constante de temps** du circuit.

→ Une fois le régime permanent atteint $\dfrac{du_c}{dt} = 0$, on conclut que $u_c = E$ en régime permanent.

→ La loi d'additivité des tensions conduit à :

$$\forall t > 0, \quad i(t) = \frac{E - u_c(t)}{R}$$

En particulier pour $t = 0^+$, le condensateur est déchargé, i est maximale et vaut $i(0^+) = E/R$; une fois le régime permanent atteint, l'intensité s'annule.

1.5 Résolution de l'équation différentielle

Le condensateur est initialement déchargé $u_c(0^-) = 0$, la continuité de la tension aux bornes d'un condensateur assure que : $u_c(0^+) = u_c(0^-) = 0$.

Le problème à résoudre est donc le suivant : on cherche u_c qui vérifie :

$$\forall t > 0, \quad E = \tau\frac{du_c}{dt} + u_c \quad \underline{\textbf{et}} \quad u_c(0^+) = 0$$

La solution générale est de la forme :

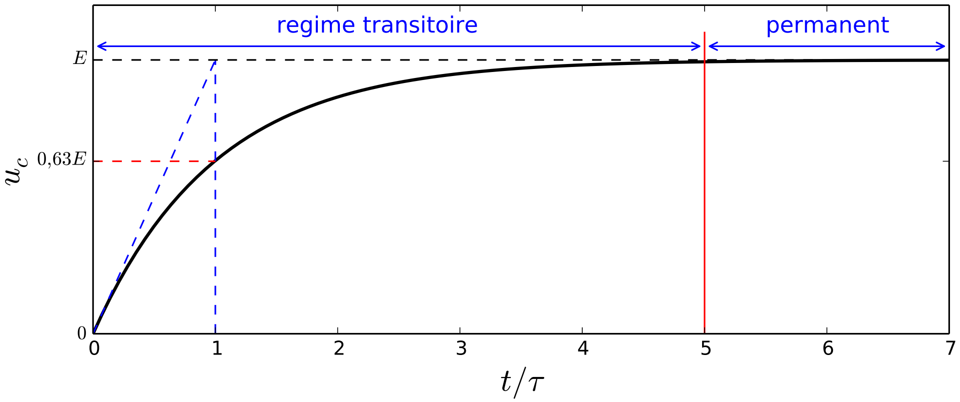
$$\forall t > 0, \quad u_c(t) = E + A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

La condition initiale impose : $u_c(0^+) = 0 = E + A \quad \Rightarrow \quad A = -E$, on en déduit :

$$\boxed{\forall t \geq 0, \quad u_c(t) = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

1.6 Tracé et constante de temps

La courbe théorique ci-dessous représente l'évolution de la tension aux bornes du condensateur en fonction de la variable adimensionnée t/τ.



→ Pour $t = 5\tau$, $u_c(5\tau) = E(1 - e^{-5}) \simeq 0,99\ E$, on peut considérer que la tension u_c a atteint sa valeur finale.

$$\boxed{\text{Le régime permanent est atteint au bout d'une durée de l'ordre de } 5\tau.}$$

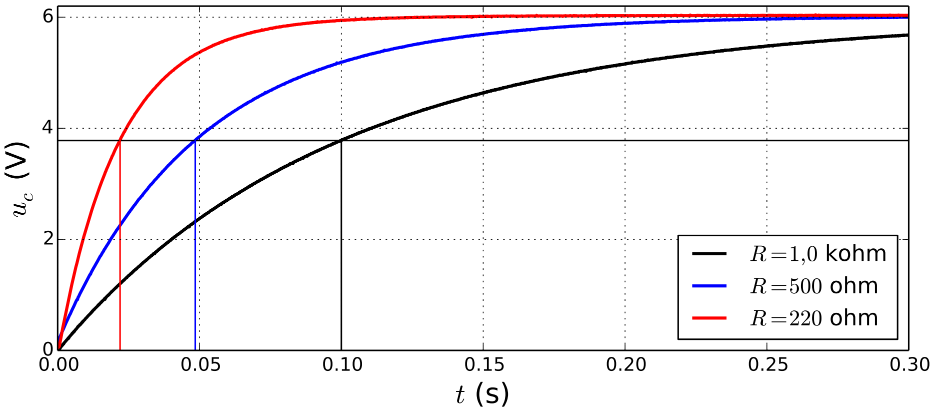
→ La constante de temps peut être déterminée graphiquement de deux manières :

⋆ La tension u_c atteint 63% de sa valeur finale pour $t = \tau$; en effet $(1 - e^{-1}) \simeq 0,63$

⋆ La tangente à l'origine coupe l'asymptote $y = E$ pour $t = \tau$.

En effet, $u_c'(0^+) = E/\tau$, la tangente à l'origine a donc pour équation $y(t) = \dfrac{E}{\tau}t$, pour $t = \tau$, $y(\tau) = E$.

Les courbes ci-contre, obtenues expérimentalement, présentent l'influence de la constante de temps sur la charge du condensateur ; pour les expériences la capacité est fixée à $C = 100\ \mu$F, et R prend trois valeurs distinctes.



1.7 Intensité du courant au cours de la charge

→ L'intensité du courant est nulle pour $t < 0$ (circuit ouvert).

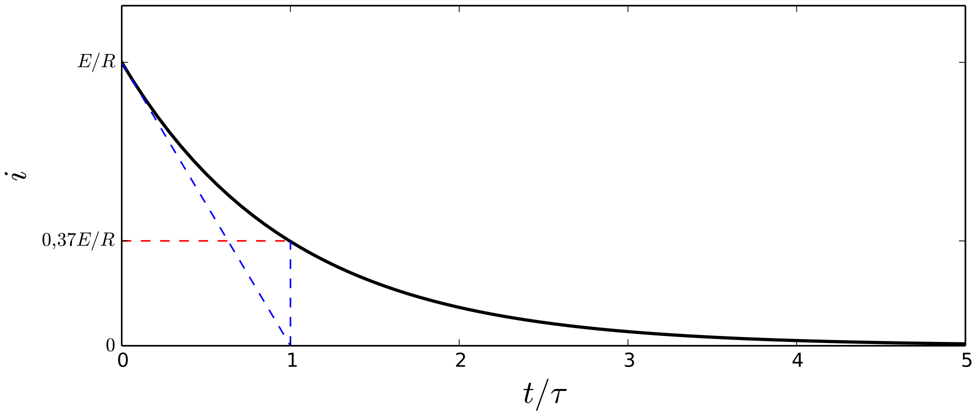
→ Pour $t > 0$, l'intensité a pour expression $i(t) = \dfrac{E}{R}e^{-t/\tau}$, cette relation peut être obtenue de deux manières :

— En utilisant la loi des mailles :

$$E = Ri(t) + u_c(t) = Ri(t) + E\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \quad \Leftrightarrow \quad 0 = Ri(t) - Ee^{-t/\tau}$$

— En utilisant la caractéristique du condensateur :

$$i(t) = C\frac{du_c}{dt} = C \times (-E) \times \frac{-1}{\tau}e^{-t/\tau} = \frac{E \times C}{RC}e^{-t/\tau} = \frac{E}{R}e^{-t/\tau}$$



1.8 Bilan énergétique

→ Énergie fournie par le générateur :

$$\mathcal{E}_g = \int_0^\infty E \times i(t)dt = \int_0^\infty E \times \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} dt = \frac{E^2}{R} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{\tau}} dt = \frac{E^2}{R} \left[-\tau e^{-t/\tau} \right]_0^\infty = CE^2$$

→ Énergie stockée dans le condensateur :

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} CE^2$$

→ Énergie dissipée par effet Joule :

$$\mathcal{E}_J = \int_0^\infty R \times i^2(t)dt = \int_0^\infty R \times \frac{E^2}{R^2} e^{-\frac{2t}{\tau}} dt = \frac{E^2}{R} \int_0^\infty e^{-2t/\tau} dt = \frac{E^2 \tau}{2R} = \frac{1}{2} CE^2$$

On en déduit : $\mathcal{E}_g = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_J$.

L'énergie fournie par le générateur est, pour moitié, stockée sous forme d'énergie électrostatique dans le condensateur et, pour moitié, dissipée par effet Joule.

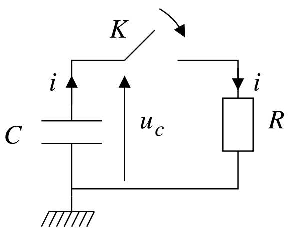
Le bilan énergétique peut être obtenu en multipliant chaque terme de la loi des mailles par l'intensité du courant :

$$(E = Ri + u_c) \times i \quad \Rightarrow Ei = Ri^2 + u_c \times i = Ri^2 + u_c \times C \frac{du_c}{dt} = Ri^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C u_c^2 \right)$$

$$\underbrace{Ei}_{\text{Puissance fournie}} = \underbrace{Ri^2}_{\text{Puissance effet Joule}} + \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C u_c^2 \right)}_{\text{Puissance reçue condensateur}}$$

2 Décharge d'un condensateur

On s'intéresse à la décharge d'un condensateur dans une résistance. Le condensateur est initialement chargé sous une tension U_0. À l'instant initial, on ferme l'interrupteur.



2.1 Équation différentielle vérifiée par $u_c(t)$

Compte tenu des conventions d'orientation, les caractéristiques s'écrivent :

$$i = -C \frac{du_c}{dt} \quad \text{et} \quad u_c = Ri$$

On en déduit :

$$\forall t > 0, \quad u_c + \tau \frac{du_c}{dt} = 0 \quad \text{avec} \quad \tau = RC$$

2.2 Résolution de l'équation différentielle

En l'absence de second membre, la solution se limite à la solution homogène :

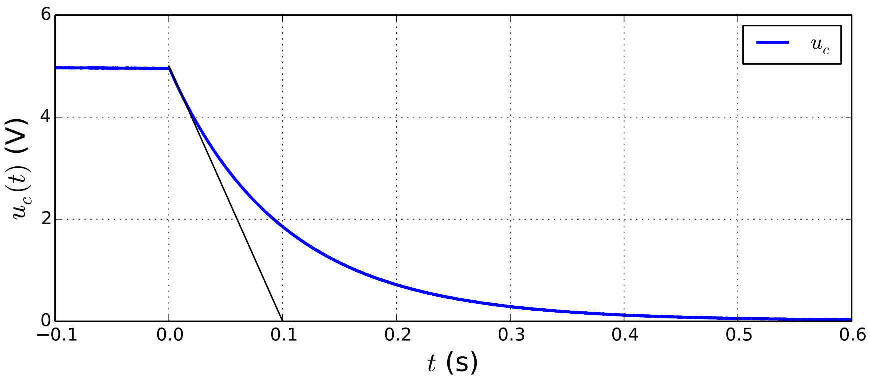
$$\forall t > 0, \quad u_c(t) = Ae^{-t/\tau}$$

La continuité de la tension aux bornes du condensateur assure que $u_c(0^+) = u_c(0^-) = U_0$, on en déduit $A = U_0$ et finalement :

$$\forall t \geq 0, \quad u_c(t) = U_0 e^{-t/\tau}$$

2.3 Résultats expérimentaux

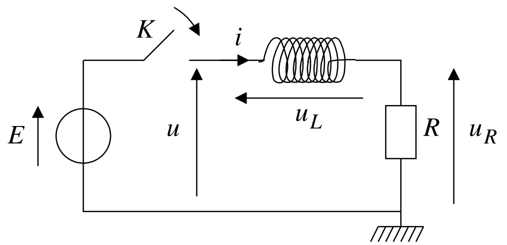
L'expérience a été réalisée avec $C = 100\ \mu$F et $R = 1,0$ kΩ. On observe la décharge du condensateur en une durée caractéristique $\tau \simeq 0,1$ s.

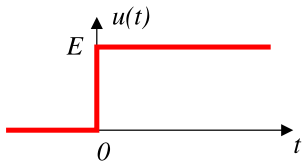


3 Réponse d'un circuit RL série à un échelon de tension

On s'intéresse à la réponse d'une association série {conducteur ohmique, bobine} que l'on soumet brusquement à une tension E constante.
On ferme l'interrupteur à $t = 0$.

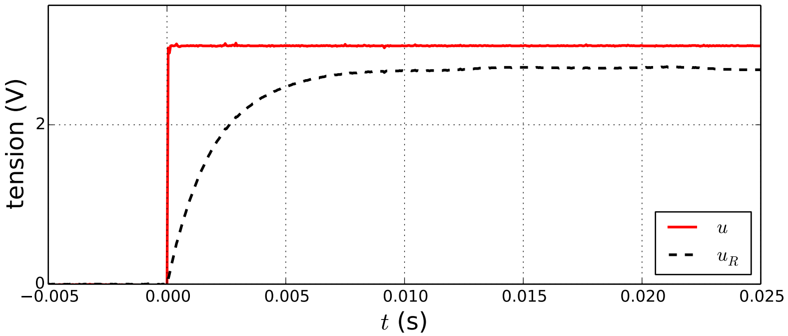
3.1 Montage





3.2 Résultats expérimentaux

On réalise une première expérience avec $R = 100\ \Omega$, $L = 0,20$ H et $E = 3,0$ V.



→ Pour un conducteur ohmique $i = u_R/R$, la mesure de la tension est une image directe de l'intensité du courant parcourant la résistance.

→ L'intensité i est continue en $t = 0$; en présence d'une bobine, l'intensité s'installe progressivement jusqu'à atteindre une valeur limite en régime permanent.

3.3 Équation différentielle vérifiée par $i(t)$

On s'intéresse à l'évolution du circuit, une fois l'interrupteur fermé, $\forall t > 0$.

→ Loi d'additivité des tensions : $u = E = u_L + u_R$

→ Caractéristiques des dipôles : $u_R = Ri$ et $u_L = L\dfrac{di}{dt}$

On en déduit :

$$\boxed{\forall t > 0, \quad \frac{E}{R} = \frac{L}{R}\frac{di}{dt} + i}$$

3.4 Analyse de l'équation différentielle

→ L'équation différentielle fait apparaître $\tau = \dfrac{L}{R}$, la **constante de temps** du circuit. La bobine tend à retarder l'installation du courant.

→ Une fois le régime permanent atteint $\dfrac{di}{dt} = 0$, on conclut que $i = \dfrac{E}{R}$ en régime permanent.

3.5 Résolution de l'équation différentielle

Tant que l'interrupteur est ouvert, l'intensité du courant est nulle $i(0^-) = 0$, la continuité de l'intensité du courant parcourant une bobine assure que : $i(0^+) = i(0^-) = 0$.

Le problème à résoudre est donc le suivant : on cherche i qui vérifie :

$$\forall t > 0, \quad \frac{E}{R} = \tau\frac{di}{dt} + i \quad \underline{\textbf{et}} \quad i(0^+) = 0$$

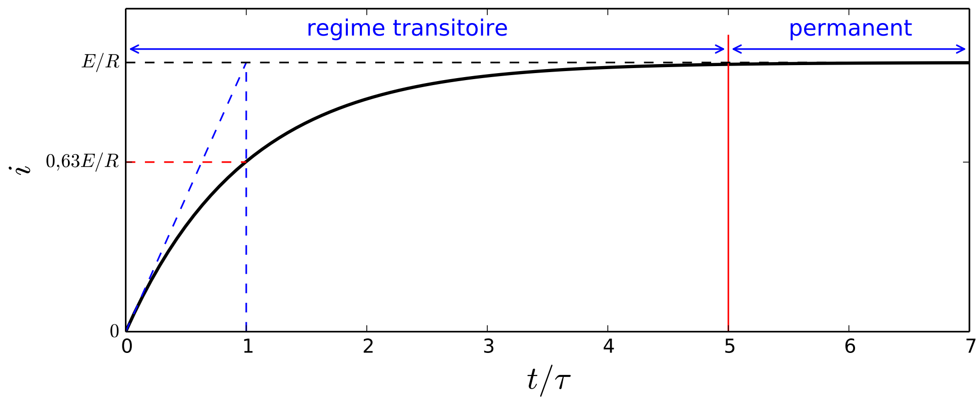
La solution générale est de la forme :

$$\forall t > 0, \quad i(t) = \frac{E}{R} + A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

La condition initiale impose : $i(0^+) = 0 = \dfrac{E}{R} + A \quad \Rightarrow \quad A = -\dfrac{E}{R}$, on en déduit :

$$\boxed{\forall t \geq 0, \quad i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

3.6 Tracé



La courbe précédente représente l'évolution de l'intensité dans le circuit en fonction de la variable adimensionnée t/τ.

3.7 Bilan énergétique

Pour obtenir le bilan de puissance, on multiplie la loi des mailles par i :

$$(E = Ri + u_L) \times i \quad \Rightarrow Ei = Ri^2 + u_L \times i = Ri^2 + L\frac{di}{dt} \times i = Ri^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right)$$

$$\underbrace{Ei}_{\text{Puissance fournie}} = \underbrace{Ri^2}_{\text{Puissance effet Joule}} + \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right)}_{\text{Puissance reçue bobine}}$$

****

Capacités exigibles

→ **Réaliser pour un circuit l'acquisition d'un régime transitoire du premier ordre et analyser ses caractéristiques. Confronter les résultats expérimentaux aux expressions théoriques.**

→ Distinguer, sur un relevé expérimental, régime transitoire et régime permanent au cours de l'évolution d'un système du premier ordre soumis à un échelon.

→ Interpréter et utiliser les continuités de la tension aux bornes d'un condensateur ou de l'intensité dans une bobine.

→ Établir l'équation différentielle du premier ordre vérifiée par une grandeur électrique dans un circuit comportant une ou deux mailles.

→ Prévoir l'évolution du système, avant toute résolution de l'équation différentielle, à partir d'une analyse s'appuyant sur une représentation graphique de la dérivée temporelle de la grandeur en fonction de cette grandeur.

→ Déterminer analytiquement la réponse temporelle dans le cas d'un régime libre ou d'un échelon. Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire.

→ Réaliser des bilans énergétiques.

Annexe : résolution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants

On considère une équation différentielle à coefficients constants de la forme :

$$\boxed{\tau\frac{du}{dt} + u = E}$$

La solution est de la forme : $u = u_p + u_h$ avec :

→ u_p, une solution particulière de l'équation avec second membre ;
→ u_h, la solution homogène, solution générale de l'équation sans second membre.

⋆ La solution particulière est n'importe quelle fonction solution de :

$$\tau\frac{du_p}{dt} + u_p = E$$

Avec un second membre constant, on recherche une solution constante, $u_p(t) = E$ convient.

⋆ La solution homogène est la solution générale de :

$$\tau\frac{du_s}{dt} + u_s = 0$$

On montre que la solution cherchée est : $u_s(t) = A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$, avec A une constante d'intégration inconnue à ce stade.

<u>Justification</u> : avec la solution proposée

$$\tau\frac{du_s}{dt} + u_s = \tau \times \left(-\frac{1}{\tau}\right) \times A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = 0$$

En conclusion, la solution de l'équation différentielle est donc :

$$\boxed{u(t) = E + A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$$

la constante A étant déterminée grâce à la **condition initiale**.

Applications directes :

AD 1.

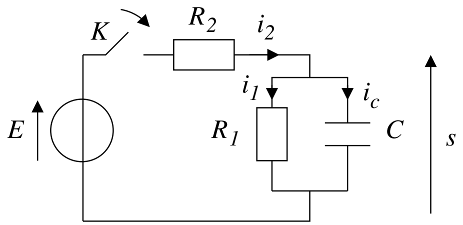
Un condensateur de capacité C se charge sous la tension E selon la loi :

$$u(t) = E(1 - \exp(-t/\tau))$$

1. Calculer le pourcentage de charge atteint à l'instant $t = \tau$.
2. Exprimer en fonction de τ la durée ΔT nécessaire permettant à la tension de passer de 10% de E à 90% de E (cette durée est appelée temps de montée).

AD 2.

On considère le circuit suivant :



À $t = 0$, on ferme l'interrupteur, le condensateur est initialement déchargé.

1. Déterminer, « sans calcul », les valeurs de i_1, i_2 et s en $t = 0^+$.
2. Déterminer, « sans calcul », les valeurs de i_1, i_2 et s quand $t \to +\infty$.
3. Établir l'équation différentielle vérifiée par s.
4. L'écrire sous la forme $\tau \dfrac{ds}{dt} + s = G \times E$ en précisant les expressions de τ et G.
5. Déterminer l'expression de $s(t)$.
6. Déterminer l'instant t_0 pour lequel la tension aux bornes du condensateur atteint 90% de sa valeur maximale.